Invarianty a v čem vězí

Franta Konopecký

Při styku s úlohami se využívají různé strategie a jednou z těch podstatných je hledání invariantů. To pomáhá zdolat mnohdy i zdánlivě obtížné problémy. Shlédněme ilustrační příklad:

Příklad. Buď $d(n)$ ciferný součet čísla n. Najděte všechna řešení rovnice

$$n + d(n) + d(d(n)) = 2008.$$

Řešení. Po krátkém nezdaru při hledání vyhovujících n se pokusíme dokázat, že rovnice nemá řešení. A hle, využijeme invariant. Při ciferném součtu se zachovává zbytek po dělení třemi, proto je levá strana rovnice vždy dělitelná třemi a nemůže být rovna 2008.

Naše základní strategie tedy říká: **Kde se něco opakuje, hledej to, co zůstává stejné.** Příbuzná myšlenka je hledat něco, co se sice mění, ale kontrolovaným způsobem (např. nějaké číslo stále roste).

Uveďme si ještě několik invariantů, které jsou často užitečné.

(1) součet čísel, případně součet modulo n (pro vhodné n).

(2) součet druhých mocnin (geometricky vzdálenost od počátku).

(3) další aritmetické operace: součin, podíl, součet čtverců rozdílů, ...

(4) počet nějakých jevů, případně modulo n.

Příklady

Příklad 1. Na tabuli jsou napsána čísla 1, 2, ... , $2n$ (n je liché přirozené). Můžeme smazat libovolná dvě čísla a, b a místo nich napsat $|a-b|$. Toto opakujeme. Dokažte, že poslední zbylé číslo je liché.

Příklad 2. Ve vrcholech šestiúhelníku jsou napsána čísla 1, 0, 1, 0, 0, 0. V jednom kroku smíme zvýšit o jedna dvě sousední čísla. Je možné opakováním tohoto kroku získat šest stejných čísel?

Příklad 3. Na zájezdě má každý turista nejvýše tři nepřátele. Dokažte, že je možno turisty rozdělit do dvou autobusů tak, že nikdo nejede v autobuse s více než jedním svým nepřítelem. Zobecněte.

Příklad 4. Mějme celá čísla a, b, c a d, ne všechna stejná. Opakovaně budeme nahrazovat čtveřici (a, b, c, d) čtveřicí $(a - b, b - c, c - d, d - a)$. Ukažte, že alespoň jedna souřadnice bude jednou v absolutní hodnotě větší než milion.

Příklad 5. Nech $0 < x_0 < y_0$. Vyjádřete vzorcem x_n, y_n definované rekurentními vztahy:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n}.$$

Příklad 6. Každé z čísel $a_1, \ldots, a_n$ je $+1$ nebo -1 a platí $a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0$. Dokažte, že n je dělitelné čtyřmi.

Příklad 7. Ke kulatému stolu má usednout $2n$ poslanců, každý z nich má nanejvýš $n-1$ nepřátel. Ukažte, že je možno je rozesadit tak, aby nikdo neseděl vedle svého nepřítele.

Příklad* 8. Ke každému vrcholu pětiúhelníku napíšeme celé číslo, součet všech pěti čísel je kladný. Pokud na obvodu pětiúhelníku jsou x, y a z (v tomto pořadí) a $y < 0$, můžeme tuto trojici nahradit trojicí $x+y$, $-y$, $y+z$. Může tento proces probíhat nekonečně dlouho? (Řešte i pro reálná čísla.)

Příklad 9. Začněme s nějakou čtveřicí celých čísel (varianta: reálných čísel) (a,b,c,d). Opakovaně budeme nahrazovat čtveřici (a,b,c,d) čtveřicí $(|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$. Dostaneme se vždy ke čtveřici $(0,0,0,0)$?

Příklad 10. Začněme s čísly 1, 2, ..., $4n-1$. V jednom tahu nahradíme dvě čísla jejich rozdílem. Dokažte, že po $4n-2$ tazích zbyde sudé číslo.

Příklad 11. Mějme množinu $\{3,4,12\}$. Jsou-li a, b různé prvky naší množiny, můžeme je nahradit čísly $0.6a - 0.8b$ a $0.8a + 0.6b$. Můžeme někdy dostat množinu (a) $\{4,6,12\}$ nebo (b) $\{x,y,z\}$ kde $|x-4|, |y-6|, |z-12| < 1/\sqrt{3}$?

Příklad 12. Vezmeme šachovnici s obvyklým obarvením políček. V jednom tahu můžeme převrátit barvy v (celé) jedné řadě, (celém) jednom sloupci, či v (celém) čtverečku 2×2 políčka. Můžeme získat obarvení s jediným černým políčkem?

Příklad* 13. Mějme čísla a, b kladná celá. Dokud je $a > 0$ opakujeme následující operaci: pokud je $a < b$, dosadíme místo (a,b) dvojici $(2a, b-a)$, jinak místo (a,b) dosadíme $(a-b, 2b)$. Pro které výchozí dvojice postup skončí? Po kolika krocích? Co můžete říci o periodách v nekonečném procesu? žešte i pro kladná reálná a, b.

Příklad 14. Máme modré, červené a zelené korálky. V jednom tahu smíme provést výhodnou výměnu: zahodíme dva korálky, každý jiné barvy a dostaneme za ně korálek barvy třetí. Kdy můžeme tímto postupem skončit s jediným korálkem? Záleží barva zbylého korálku na zvoleném postupu?

Příklad 15. Opět máme modré, červené a zelené korálky, tentokrát za zahození dvou korálků různých barev dostaneme dva korálky barvy třetí. Kdy je možno docílit toho, že všechny korálky budou mít tutéž barvu?

Příklad 16. V každém políčku obdélníkové tabulky je napsáno celé kladné číslo. V každém tahu je možno zmenšit všechna čísla v jednom sloupci o jedna nebo zdvojnásobit všechna čísla v jedné řadě. Dokažte, že je možno dosáhnout tabulky se samými nulami.

Příklad 17. Každé z čísel od jedné do milionu nahradíme jeho ciferným součtem. Opakujeme, dokud nedostaneme milion jednociferných čísel. Bude víc jedniček nebo dvojek?

Příklad 18. Vrcholy mnohoúhelníku jsou označeny reálnými čísly. Pokud nějaká čtveřice po sobě jdoucích čísel a, b, c, d splňuje vztah $(a-d)(b-c)<0$, smíme prohodit b a c. Můžeme toto prohození provést nekonečněkrát?

Příklad 19. Na políčku b1 šachovnice je napsáno -1, na ostatních $+1$. Máme možnost změnit znaménko čísel v jednom sloupci, jedné řadě nebo na libovolné diagonále (včetně jednopolíčkových diagonál, tj. rohových políček). Dokažte, že nám vždy zbyde nějaká -1.

Příklad 20. Mějme řadu 2000 čísel. Do druhé řady pod každé číslo napíšeme počet jeho opakování v řadě první. Stejně vytvoříme z druhé řady řadu třetí atd. Dokažte, že jednou budou dvě po sobě jdoucí řady stejné.

Příklad 21. Na každém políčku šachovnice je celé číslo, smíme přičíst jedničku ke všem číslům nějakého čtverce 4×4 nebo 3×3 políčka. Můžeme opakováním této operace docílit toho, aby byla všechna čísla na šachovnici dělitelná (a) dvěma, (b) třemi?

Příklad 22. Z čísla 11^{2000} vyškrtneme první číslici a přičteme ji ke zbylému číslu. Tuto operaci opakujeme, dokud nezískáme deseticiferné číslo. Ukažte, že dvě z jeho cifer budou stejné.

Příklad* 23. Na políčku $(1,1)$ stojí věž. Jedním tahem smíme buď zdvojnásobit jednu souřadnici, nebo odečíst menší souřadnici od větší. Na která políčka se věž může dostat?

Příklad* 24. Mějme posloupnost začínající $1,0,1,0,1,0,\dots$ jejíž další členy získáme jako součet předchozích šesti modulo 10. Vyskytne se v této posloupnosti šestice $\dots,0,1,0,1,0,1,\dots$?

Příklad* 25. Vezmeme 35 celých čísel. Můžeme vybrat nějakých 13 z nich a zvětšit každé z těchto třinácti o 1. Ukažte, že můžeme docílit toho, že všech 35 čísel bude stejných. Prozkoumejte i zobecnění — pro n čísel, z nichž je možno volit m.

Příklad 26. Čísla 1, 2, …, $2n$ jsou seřazena v libovolném pořadí. Ke každému číslu přičteme jeho pořadové číslo. Dokažte, že dostaneme dvě čísla se stejným zbytkem modulo $2n$.

Příklad 27. V kruhu je rozmístěno n důlků, v každém je jedna kulička. V jednom tahu smíme posunout jednu kuličku po směru hodinových ručiček, jinou proti směru. Můžeme shromáždit všechny kuličky v jednom důlku?

Příklad* 28. Na každý mřížový bod (x, y) pro $y \leq 0$ můžeme položit dámový kámen. Pak s těmito kameny zacházíme jako při solitéru: vybereme dva kameny sousedící vodorovně nebo svisle a jedním přeskočíme druhý (ten druhý zahodíme) a dopadneme na volné políčko. Tímto postupem chceme dostat nějaký kámen na políčko $(0, n)$ pro co největší n.

Příklad* 29. Čísla 1, 2, ... , n jsou libovolně uspořádána. V jednom kroku můžeme dvě sousední čísla (varianta: dvě libovolná čísla) prohodit. Můžeme po lichém počtu kroků dojít k výchozímu uspořádání?

Příklad* 30. Vezměme čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. V jednom kroku můžeme jeden trojúhelník rozdělit výškou (na přeponu) na dva podobné trojúhelníky. Můžeme opakovaným dělením docílit toho, že žádné dva z našich trojúhelníků nebudou shodné?

Zdroje

Tento příspěvek je prakticky kopií příspěvku *Roberta Šámala* z roku 2000. Řešení naprosté většiny uvedených příkladů lze nalézt v publikaci

Engel A.: Problem Solving Strategies, Springer-Verlag 1998.

Ta je sice vzácná, ale když mi napíšete (`frakonZAVINÁČgmail.com`), tak vás zaopatřím elektronickou kopií.