Integrál a jeho aplikace

Tomáš Matoušek

Křivka

Definice. (Vektorová funkce) *Funkci $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, která reálnému číslu přiřazuje n-tici reálných čísel (vektor), nazýváme funkcí vektorovou. Lze ji také popsat po složkách jako $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, kde $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce.*

Definice. (Křivka) *Nechť $\langle a, b\rangle$ je interval a $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ je (vektorová) funkce. Pak $C = \varphi(\langle a, b\rangle)$ je křivka, pokud*

- *φ má konečně mnoho vícenásobných bodů,*
- *φ je po částech spojitá,*
- *$(\varphi_1', \ldots, \varphi_n') = (0, \ldots, 0)$ jen v konečně mnoha bodech (derivace viz dále).*

Funkce φ je parametrizací křivky C.
Křivka je jednoduchá, pokud nemá vícenásobné body.
Křivka je uzavřená, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Příkladem uzavřené rovinné křivky může být třeba kružnice se středem v počátku a poloměrem R. Její parametrizací je např. funkce $\varphi : \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^2$, popsaná v kartézských souřadnicích vztahem

$$\varphi(t) = (R\cos t, R\sin t)$$

Přidáme-li navíc třetí složku $z = \frac{ht}{2\pi}$, dostaneme spirálu, jejíž jeden závit bude mít výšku h.

Limita a derivace

Definice. (Limita) *Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Existuje-li $L \in \mathbb{R}$ takové, že*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)) : f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon),$$

pak je L vlastní[2] limitou funkce f v bodě a, nebo-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Pokud takové L neexistuje, pak funkce nemá v bodě a vlastní limitu.

[2] lze definovat i nevlastní limitu mající hodnotu $\pm\infty$, to ale nebudeme potřebovat. Slovo *vlastní* budeme proto uvádět jen tehdy, je-li nezbytné, aby limita byla reálným číslem.

Nahradíme-li v definici množinu $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$ *intervalem* $(a-\delta, a)$ *resp.* $(a, a+\delta)$, *dostaneme definici limity zleva* $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ *resp. limity zprava* $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$.

Lemma. *Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.*

Definice. (Derivace) *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Limitu*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t}$$

nazýváme derivací funkce f *v bodě* a. *Existuje-li tato limita a je-li vlastní na nějaké množině* $M \subseteq \mathbb{R}$, *pak funkce* $f' : M \to \mathbb{R}$, *která každému bodu* $a \in M$ *přiřadí uvedenou limitu, je derivací funkce* f *na* M.

V následující tabulce jsou uvedena některá pravidla pro výpočet derivací funkcí a také derivace základních funkcí. Pro přehlednost jsou v tabulce vynechány podmínky, za nichž mají výrazy smysl. V pravidlech předpokládáme, že všechny derivace existují a jsou vlastní.

linearita[3]

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

derivace součinu

$$(fg)' = f'g + fg'$$

derivace podílu[4]

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

f	f'
x^α	$\alpha\, x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Riemannův integrál

Definice. (Dělení intervalu) *Nechť* $\langle a, b\rangle$ *je uzavřený interval a nechť* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ *jsou reálná čísla. Pak posloupnost* $x_0, \ldots, x_n$ *je dělením intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a její členy jsou jeho dělící body.*

[3] $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

[4] Platí tam, kde je g nenulová.

Definice. (Omezená funkce na intervalu) *Nechť I je interval. Funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je na I omezená shora resp. zdola, pokud existuje $C \in \mathbb{R}$ taková, že $f(x) < C$ resp. $f(x) > C$ pro každé $x \in I$. Je-li funkce omezená zdola i shora, pak je omezená.*

Definice. (Riemannův součet) *Nechť $\langle a, b\rangle$ je interval, $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je na tomto intervalu omezená. Nechť $D = x_0, \ldots, x_n$ je dělení $\langle a, b\rangle$. Pak*
dolním Riemannovým součtem funkce f při dělení D rozumíme

$$s(f, D) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{x \in \langle x_{j-1}, x_j\rangle} f(x) \cdot (x_j - x_{j-1}),$$

horním Riemannovým součtem funkce f při dělení D rozumíme

$$S(f, D) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in \langle x_{j-1}, x_j\rangle} f(x) \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Definice. (Riemannův integrál) *Nechť $\langle a, b\rangle$ je interval, $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je na tomto intervalu omezená.*
Dolním Riemannovým integrálem funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$ je

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{D \text{ je dělení } \langle a,b\rangle} s(f, D),$$

horním Riemannovým integrálem funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$ je

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{D \text{ je dělení } \langle a,b\rangle} S(f, D).$$

Jestliže se tyto integrály rovnají, pak je f na $\langle a, b\rangle$ riemannovsky integrovatelná a její Riemannův integrál je

$$(R)\int_a^b f\,\mathrm{d}x(x) = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Množinu riemannovsky integrovatelných funkcí na $\langle a, b\rangle$ značíme $\mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.

Věta. *Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.*

Pro přehlednost dále vynecháme označení (R) u Riemannova integrálu. Také se domluvíme, že $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta. (Vlastnosti Riemannova integrálu) *Nechť $c \in \langle a, b\rangle$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$. Pak také $f + g, \alpha f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$, $f \in \mathcal{R}(a, c)$, $f \in \mathcal{R}(c, b)$ a navíc*

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Z definice Riemannova integrálu plyne i význam jeho hodnoty. Je-li f např. nezáporná a spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak hodnota integrálu je rovna obsahu útvaru ohraničeného funkcí f, osou x a kolmicemi na osu x jdoucími z bodů $(a, 0)$, $(b, 0)$. Avšak z uvedené definice neplyne, jak tuto hodnotu vypočítat. K tomu se dostaneme později.

Riemannův integrál lze použít i na výpočet délky křivky, objemu a povrchu tělesa.

Věta. (Výpočet délky křivky) *Nechť C je křivka a $\varphi : \langle a, b\rangle \to C$ její parametrizace v kartézských souřadnicích, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Délka křivky C je*

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1')^2(t) + \cdots + (\varphi_n')^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Věta. (Výpočet objemu a povrchu rotačního tělesa) *Nechť f je na $\langle a, b\rangle$ spojitá a nezáporná. Těleso*

$$T = \left\{(x, y, z);\ \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x)\right\}$$

má objem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

a povrch pláště

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f')^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Primitivní funkce a Newtonův integrál

Definice. (Primitivní funkce) *Nechť F, f jsou funkce definované na intervalu (a, b). Řekneme, že F je primitivní funkce k funkci f na (a, b), pokud $F' = f$ na (a, b). Zapisujeme $F = \int f\,\mathrm{d}x$.*

Lemma. *Jsou-li F, G primitivní funkce k funkci f, pak existuje konstanta c taková, že $F = G + c$.*

Věta. *Nechť f je na (a, b) spojitá. Pak f má na (a, b) primitivní funkci.*

V následující tabulce jsou uvedeny některé primitivní funkce. Pro přehlednost jsou vynechány konstanty a také podmínky, za kterých mají výrazy smysl. Vlevo jsou uvedeny některé metody výpočtu primitivních funkcí.

integrace per partes[5]

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

substituce[6]

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

využití linearity

$$\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g$$

f	$\int f$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x$

Definice. (Newtonův integrál) *Řekneme, že f má na $\langle a,b\rangle$ Newtonův integrál*

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x),$$

je-li F primitivní funkcí k f na (a,b) a má-li výraz vpravo smysl.
Množinu funkcí newtonovsky integrovatelných na $\langle a,b\rangle$ značíme $\mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$.

Věta. (Newton–Leibnitzova formule) *Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle) \cap \mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$. Pak*

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[5] Předpokládáme f', g' spojité na (a,b).
[6] Předpokládáme, že $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ a φ' je vlastní na (α,β).