Matematická indukce

Verča Hladíková

Abstrakt. Příspěvek slouží jako sbírka úloh na procvičení matematické indukce. V úvodu uvádím princip MI s pár motivačními příklady a dále zde najdete příklady nejen z PraSátka.

Matematická indukce je jedna ze základních důkazových metod, která se obvykle používá, chceme-li dokázat, že nějaké tvrzení či matematická věta platí pro všechna přirozená čísla.

Tvrzení. (Princip matematické indukce) *Buď $V(n)$ výrok závislý na přirozeném čísle n. Předpokládejme, že jsou splněny následující dvě podmínky:*

(i) *$V(1)$ je pravdivý výrok.*
(ii) *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí implikace $V(k) \Rightarrow V(k+1)$.*

Pak výrok $V(n)$ je pravdivý pro každé n přirozené.

Poznámka. Řešení využívající matematickou indukci zpravidla sestává ze dvou kroků. Nejprve ověříme první podmínku (to jde většinou snadno). Potom provedeme tzv. indukční krok, důkaz druhé podmínky. Ten obvykle vedeme tak, že předpokládáme platnost $V(k)$ a odvodíme $V(k+1)$.

Vzorový příklad

Příklad. Zapiš výraz $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1)$ v jednodušší formě.

Řešení: Ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2.$$

Toto tvrzení dokážeme indukcí. Pro $k = 1$ skutečně nastává rovnost $(2 \cdot 1 - 1 = 1^2)$. Dále buď $t \in \mathbb{N}$ libovolné.

Dokážeme, že pokud tvrzení platí pro t, platí i pro $t+1$. Jelikož jsme výše ukázali, že platí pro jedničku, bude pak muset platit také pro všechna přirozená k. Chceme tedy dokázat, že

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2t-1) + (2t+1) = (t+1)^2,$$

přičemž můžeme využít toho, že

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2t - 1) = t^2. \tag{1}$$

Dosaďme nyní do levé strany dokazovaného tvrzení vztah (1) a upravme

$$[1 + 3 + 5 + \cdots + (2t - 1)] + (2t + 1) = t^2 + (2t + 1) = (t + 1)^2.$$

Jsme hotovi.

Tvrzení. (Princip silné matematické indukce) *Buď $V(n)$ výrok závislý na přirozeném čísle n. Předpokládejme, že jsou splněny následující dvě podmínky:*

(i) *$V(1)$ je pravdivý výrok.*
(ii) *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí implikace: pro každé $m \leq k$ je $V(m)$ pravdivé $\Rightarrow$ $V(k + 1)$ je pravdivé.*

Pak výrok $V(n)$ je pravdivý pro každé n přirozené.

Příklad. Ukaž, že každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ lze zapsat jako součin prvočísel.

Na rozjezd

Příklad 1. Mějme v rovině n kružnic, které ji dělí rovinu na několik oblastí. Ukaž, že je možné každou z těchto oblastí vybarvit jednou ze dvou barev tak, že žádné dvě oblasti se stejnou barvou spolu nesousedí.

Příklad 2. Mějme n přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Dokaž, že dělí rovinu na $\frac{1}{2}n(n + 1) + 1$ částí.

Příklad 3. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ můžeme trojkostičkami tvaru L pokrýt šachovnici $2^n \times 2^n$, ze které jsme odstranili jedno políčko.

Příklad 4. Dokaž, že každé přirozené $n \geq 12$ jde zapsat jako součet několika čtyřek a pětek.

Příklad 5. Nechť funkce f splňuje pro každé $n \geq -1$ vztah

$$f(n + 2) = 2f(n + 1) - f(n).$$

Dokaž, že pokud platí $f(0) = 1$ a zároveň $f(1) = 2$, pak $f(n) = n + 1$ pro všechna celá $n \geq -1$.

Příklad 6. Dokaž, že všechna čísla ve tvaru $12008, 120308, 1203308, \ldots$ jsou dělitelná číslem 19.

Příklad 7. Tabulka čokolády má n řad a m sloupců. Kolikrát musíš čokoládu přelomit, abys získal(a) jednotlivé čtverečky?

Příklad 8. Dokaž, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje n-ciferné přirozené číslo dělitelné číslem 2^n, které má za cifry pouze jedničky a dvojky. (MKS 26–4–6)

Další úlohy

Příklad 9. Mějme reálné číslo x takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokaž, že pak je i $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ celé číslo pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. (MKS 26–4–3)

Příklad 10. V PraSestánu je n měst. Mezi každými dvěma městy vede jednosměrná cesta. Dokaž, že existuje cesta vedoucí přes všechna města právě jednou.

Příklad 11. V rovině je dáno $2n$ bodů, $n \geq 2$, v obecné poloze[1]. Dále je mezi těmito body sestrojeno $n^2 + 1$ úseček. Dokaž, že existuje trojice bodů, ve které jsou každé dva spojeny úsečkou.

Příklad 12. Mějme $n = 2^k$, $k \geq 0$. Dokaž, že z libovolných $(2n - 1)$ přirozených čísel lze vybrat n takových, že jejich součet je dělitelný číslem n.

Příklad 13. Mějme $f(1) = f(2) = 1, f(n) = 3(f(n-1) + f(n-2)) + 1$ pro $n \geq 3$. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $(f(3n) + f(3n+1))$ dělitelné číslem 32.

Příklad 14. Dokaž, že pro libovolné $n \geq 0$ přirozené platí $3^{n+1} \mid 2^{3^n} + 1$.

Součty a součiny

Příklad 15. Dokaž, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

(i) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
(ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.
(iii) $1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3n-2)^2 = \frac{1}{2}n(6n^2 - 3n - 1)$.

Příklad 16. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(n+1)(n+2)\cdots 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1).$$

Příklad 17. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} < 1.$$

Příklad 18. Dokaž, že pro libovolné $n \geq 2$ platí nerovnost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Příklad 19. Buď $n \geq 2$ přirozené číslo, pak platí

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{2}{n^2}.$$

[1] tj. žádné tři neleží na přímce

Návody

1. Indukce, přebarvi rovinu po přidání jedné kružnice.

2. Kolik nových oblastí se vytvoří při přidání jedné přímky?

3. Rozděl pole $2^{n+1} \cdot 2^{n+1}$ na 4 čtverce.

4. MI $n \to n+4$

5. Vyjádři $f(n+1)$ pomocí $f(n)$ a $f(n-1)$ a ověř všechny podmínky.

6. Jaký je rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími čísly?

7. Silná indukce (nebo invariant ;).

8. Jaký zbytek dává 10^{n-1} resp. $2 \cdot 10^{n-1} \pmod{2^n}$?

9. $(x + \frac{1}{x}) \cdot (x^n + \frac{1}{x^n})$

10. Silná indukce.

11. Odeber dva spojené vrcholy a použij předpoklad.

12. Najdi dostatek podmnožin čísel o velikosti 2^{k-1}, jejichž součet je dělitelný 2^{k-1}.

13. Vyjádři $f(3(n+1))$ a $f(3(n+1)+1)$ pomocí $f(3n)$ a $f(3n+1)$.

14. Vyděl výraz pro $n+1$ výrazem pro n.

15. (i) $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+1)$
(ii) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
(iii) $(n+1)(6(n+1)^2 - 3(n+1) - 1) = 6n^3 + 15n^2 + 11n + 2$

16. Dosaď pravou stranu pro n do levé strany pro $n+1$.

17. Vymysli, čemu se rovná levá strana, a ověř MI.

18. Jaký je rozdíl výrazu pro n a $n+1$?

19. Ukaž, že $\frac{2}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < \frac{2}{(n+1)^2}$.

Literatura a zdroje

[1] Jarda Hančl, *Indukce bez králíků*, Dobrá Voda 2010.
[2] Anička Doležalová *Indukce*, Staré Město 2015