Indukce bez králíků

Jaroslav „Jardáč“ Hančl

Jak to funguje?

Matematická indukce je nástroj, který nám pomáhá formalizovat myšlenku „pro malá čísla to tak funguje a pro velká se to nepokazí“.

Tvrzení. (Princip matematické indukce) *Buď $n \in \mathbb{N}$ a $V(n)$ výroková formule. Předpokládejme, že jsou splněny následující dvě podmínky:*

(i) *$V(1)$ je pravdivý výrok.*
(ii) *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí implikace $V(k) \Rightarrow V(k+1)$.*

Pak výrok $V(n)$ je pravdivý pro každé n přirozené.

Poznámka. Řešení využívající matematickou indukci *vždy* sestává ze dvou kroků. Bod (i) obvykle ověříme snadno. Důkaz bodu (ii) (tzv. indukční krok) pak zpravidla vedeme tak, že předpokládáme platnost $V(k)$ a odvodíme $V(k+1)$.

Motivační a vzorový příklad

Příklad. Zapište výraz $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)$ v jednodušší formě.

Řešení: Ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

Toto tvrzení dokážeme indukcí. Pro $k = 1$ skutečně nastává rovnost $(2 \cdot 1 - 1 = 1^2)$. Dále buď $t \in \mathbb{N}$ libovolné.

Dokážeme, že pokud tvrzení platí pro t, platí i pro $t + 1$. Jelikož jsme výše ukázali, že platí pro jedničku, bude pak muset platit také pro všechna přirozená k. Chceme tedy dokázat, že

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2t - 1) + (2t + 1) = (t + 1)^2,$$

přičemž můžeme využít toho, že

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2t - 1) = t^2. \tag{1}$$

Dosaďme nyní do levé strany dokazovaného tvrzení ze vztahu (1) a upravme

$$[1 + 3 + 5 + \cdots + (2t - 1)] + (2t + 1) = t^2 + (2t + 1) = (t + 1)^2.$$

Jsme hotovi.

Příklady na zahřátí

Příklad 1. Mějme v rovině N kružnic, které dělí rovinu na několik oblastí. Ukažte, že je možné každou z těchto oblastí vybarvit jednou ze dvou barev tak, že každé dvě oblasti se stejnou bavou spolu nesousedí.

Příklad 2. V rovině je dáno $2n$ bodů, $n \geq 2$, v obecné poloze[1]. Dále je mezi těmito body sestrojeno $n^2 + 1$ úseček. Dokažte, že existuje trojice bodů, ve které jsou každé dva spojeny úsečkou.

Příklad 3. Ukažte, že pro $n \geq 5$ lze čtverec rozdělit na n (ne nutně různých) čtverců.

Příklad 4. Mějme reálné číslo x, pro které je hodnota $x + \frac{1}{x}$ číslo celé. Dokažte, že pak je celé i číslo $x^n + \frac{1}{x^n}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. (PraSe 26/4, 3. příklad)

Příklad 5. Pro přirozené číslo n si napišme všechny zlomky tvaru $\frac{1}{pq}$, kde čísla p a q jsou nesoudělná a platí $0 < p < q \leq n$, $p + q > n$. Dokažte, že pak součet všech těchto zlomků je konstantní pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. (PraSe 26/4, 5. příklad)

Příklad 6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje n-ciferné přirozené číslo dělitelné číslem 2^n, které má za cifry pouze jeničky a dvojky.
(PraSe 26/4, 6. příklad)

Příklad 7. Dokažte, že mezi každými 2^{n+1} čísly lze najít 2^n čísel takových, že jejich součet je dělitelný 2^n.

Příklad 8. Dokažte, že pro libovolné $n \geq 0$ přirozené platí $3^{n+1} \mid 2^{3^n} + 1$.

Příklad 9. Mějme přirozená čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ taková, že součty $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ a $y_1 + y_2 + \cdots + y_m$ jsou rovny témuž číslu menšímu než $m \cdot n$. Dokažte, že v rovnosti

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

lze vyškrtnout několik sčítanců (ale ne všechny) tak, aby vzniklo opět platné tvrzení.

Příklad 10. Pro p liché označme x_1 a x_2 kořeny kvadratické rovnice $x^2 + px - 1 = 0$. Dále definujme posloupnost $y_n = x_1^n + x_2^n$, kde $n \geq 0$. Dokažte, že čísla y_n a y_{n+1} jsou nesoudělná pro libovolné n přirozené.

Příklad 11. Uvažme všechny podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, N\}$, které neobsahují dvě po sobě jdoucí čísla. Ukažte, že součet čtverců součinu všech prvků těchto množin je $(N + 1)! - 1$.

[1] tj. žádné tři neleží na přímce

Příklad 12. Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.
(ii) $1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3n-2)^2 = \frac{1}{2}n(6n^2 - 3n - 1)$.
(iii) $2^2 + 5^2 + 8^2 + \cdots + (3n-1)^2 = \frac{1}{2}n(6n^2 + 3n - 1)$.

Příklad 13. Dokažte, že pro libovolné $n \geq 2$ platí nerovnost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Příklad 14. Pro n přirozené dokažte nerovnost

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Příklad 15. Buď $n \geq 2$ přirozené číslo, pak platí

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{2}{n^2}.$$

Příklad 16. Mějme $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Příklady pro myslitele

Příklad 17. Mějme a, b přirozená čísla taková, že podíl $P = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$ je přirozené číslo. Dokažte, že potom je to čtverec. (IMO 1988 – 6. příklad)

Příklad 18. Posloupnost $\{a_n\}$ je definovaná rekurentně vztahy $a_{n+1} = 3a_n^4 + 4a_n^3$, $a_0 = 9$. Dokažte, že člen a_{10} obsahuje ve svém desítkovém zápisu více než 1000 devítek. (Turnaj měst)

Literatura a zdroje

Nejprve bych chtěl poděkovat J. Tkadlecovi za sepsání úvodu a H. Bendové za sepsání příspěvku, který se také stal předlohou pro výběr příkladů.

[1] Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies*, Springer, UK, 1998.
[2] Michal Rolínek, Josef Tkadlec, Seminář *Umění vidět v matematice*.