Indukce

Anička Doležalová

Abstrakt. Příspěvek slouží jako úvod do matematické indukce pro úplné začátečníky a jako sbírka příkladů pro ty, kteří si v ní ještě zcela nevěří.

Matematická indukce je jedna ze základních důkazových metod, která se obvykle používá, chceme-li dokázat, že nějaké tvrzení či matematická věta platí pro všechna přirozená čísla.

Tvrzení. (Princip matematické indukce) *Buď $V(n)$ výrok závislý na přirozeném čísle n. Předpokládejme, že jsou splněny následující dvě podmínky:*

(i) *$V(1)$ je pravdivý výrok.*
(ii) *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí implikace $V(k) \Rightarrow V(k+1)$.*

Pak výrok $V(n)$ je pravdivý pro každé n přirozené.

Poznámka. Řešení využívající matematickou indukci zpravidla sestává ze dvou kroků. Nejprve ověříme první podmínku (to většinou jde snadno), potom provedeme tzv. indukční krok, důkaz druhé podmínky. Ten obvykle vedeme tak, že předpokládáme platnost $V(k)$ a odvodíme $V(k+1)$.

Vzorový příklad

Příklad. Ukážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Řešení. První krok: $V(1)$ má podobu $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, což zřejmě platí. Druhý krok: Předpokládejme, že pro všechna přirozená čísla od 1 do k výrok V platí. Chceme ukázat, že platí i $V(k+1)$. K tomu můžeme využít tvrzení, které už známe, totiž $V(k)$:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

K oběma stranám rovnosti přičteme $k+1$ a upravíme:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1),$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Tedy $1+2+\cdots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, což je $V(k+1)$. Jsme hotovi.

Úlohy

Příklad 1. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Příklad 2. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+\cdots+n)^2.$$

Příklad 3. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Příklad 4. (Binomická věta) Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a a, b reálná platí

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

Příklad 5. Mějme v rovině n kružnic, které dělí rovinu na několik oblastí. Ukaž, že je možné každou z těchto oblastí vybarvit jednou ze dvou barev tak, že žádné dvě oblasti se stejnou barvou spolu nesousedí.

Příklad 6. (Částečný součet geometrické posloupnosti) Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $q \neq 1$ reálné platí

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Příklad 7. Mějme n přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Dokaž, že dělí rovinu na $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ částí.

Příklad 8. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}<1.$$

Příklad 9. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(n+1)(n+2)\cdots 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1).$$

Příklad 10. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ můžeme trojkostičkami tvaru L pokrýt šachovnici $2^n \times 2^n$, ze které jsme odstranili jedno políčko.

Příklad 11. Nechť funkce f pro každé $n \geq -1$ splňuje vztah

$$f(n+2) = 2f(n+1) - f(n).$$

Dokaž, že pokud platí $f(0) = 1$ a zároveň $f(1) = 2$, pak $f(n) = n + 1$ pro všechna celá $n \geq -1$.

Příklad 12. Mějme $f(1) = f(2) = 1, f(n) = 3(f(n-1) + f(n-2)) + 1$ pro $n \geq 3$. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $(f(3n) + f(3n+1))$ dělitelné číslem 32.

Příklad 13. Dokaž, že všechna čísla ve tvaru $12008, 120308, 1203308, \ldots$ jsou dělitelná číslem 19.

Jak ne

Pro $n \geq 2$ přirozené „dokážeme“, že n různých přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné, má jeden společný bod.

Další úlohy

Příklad 14. Mějme reálné číslo x takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokaž, že pak je i $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ celé číslo pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. (MKS 26–4–3)

Příklad 15. Dokaž, že každé přirozené $n \geq 12$ jde zapsat jako součet několika čtyřek a pětek.

Příklad 16. Dokaž, že každé přirozené číslo $n \geq 2$ se dá zapsat jako součin několika prvočísel.

Příklad 17. Dokaž, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje n-ciferné přirozené číslo dělitelné číslem 2^n, které má za cifry pouze jedničky a dvojky. (MKS 26–4–6)

Literatura a zdroje

Příspěvek čerpá hlavně ze starších přednášek Jardy Hančla a Háni Krulišové (Bendové), dále pak z knih

[1] Engel, *Problem Solving Strategies*, 1998.
[2] Matoušek, Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, 2009.