Kdopak by se IMO šestky bál?

Mirek Olšák

Abstrakt. Příspěvek obsahuje vybrané, převážně kombinatorické, úlohy z mezinárodní matematické olympiády. Na konci příspěvku jsou k jednotlivým úlohám návody.

The best way to have good ideas is to have lots of them. *(Linus Pauling)*

Úloha 1. Na sportovním klání bylo m medailí udělováno v n po sobě jdoucích dnech ($n > 1$). První den byla udělena jedna medaile a $1/7$ všech zbývajících $m-1$ medailí. Další den dvě medaile a $1/7$ z v tu chvíli zbývajících medailí; a tak dále. V n-tém posledním dni bylo uděleno zbylých n medailí. Kolik dní mělo klání a kolik medailí bylo celkem uděleno? (IMO 1967–6)

Úloha 2. Pro každé přirozené číslo určete hodnotu sumy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor + \cdots$$

(Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí nejvyšší celé číslo nepřevyšující x.) (IMO 1968–6)

Úloha 3. Mějme čtvercovou tabulku $n \times n$ nezáporných celých čísel. Předpokládejme, že kdykoli má nějaké políčko P nulovou hodnotu, pak součet hodnot na všech políčkách, která mají s P jednu společnou souřadnici, je vyšší nebo roven n. Dokažte, že součet hodnot na všech políčkách je roven alespoň $n^2/2$. (IMO 1971–6)

Úloha 4. Nechť S je čtverec se stranami délky 100 a L je lomená čára uvnitř S, která se neprotíná (ani nedotýká). Předpokládejme, že pro každý bod na hranici S je možné nalézt bod na L, který není od P dál než $1/2$. Dokažte, že je možné na L najít dva body X, Y takové, že $|XY| \le 1$, ale délka L mezi X a Y je alespoň 198. (IMO 1982–6)

Úloha 5. Říkáme, že permutace $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ má vlastnost P, pokud pro alespoň jedno $i \in \{1, 2, \ldots 2n-1\}$ platí $|x_i - x_{i+1}| = n$. Ukažte, že pro každé n existuje více permutací s vlastností P než bez ní. (IMO 1989–6)

Úloha 6. Ukažte, že existuje konvexní 1990-úhelník splňující následující vlastnosti:

(i) všechny úhly jsou stejné,

(ii) délky stran jsou v nějakém pořadí $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 1990^2$.

(IMO 1990–6)

Úloha 7. Ukažte, že existuje množina A kladných celých čísel s následující vlastností: Pro každou nekonečnou podmnožinu S prvočísel najdeme dvě kladná celá čísla $m \in A$, $n \notin A$ taková, že obě jsou součinem k různých prvků S pro nějaké $k \geq 2$.
(IMO 1994–6)

Úloha 8. Nechť p je liché prvočíslo. Kolik existuje p-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ se součtem dělitelným p? (IMO 1995–6)

Úloha 9. Jsou dána tři kladná celá čísla p, q, n splňující $p+q < n$. Nechť $(n+1)$-tice $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ splňuje následující podmínky:

(i) $x_0 = x_n = 0$,
(ii) pro každé i splňující $1 \leq i \leq n$ buď $x_i - x_{i-1} = p$, nebo $x_i - x_{i-1} = -q$.

Ukažte, že existují indexy $i < j$, $(i, j) \neq (0, n)$ takové, že $x_i = x_j$. (IMO 1996–6)

Úloha 10. Na matematické soutěži, kde každý soutěžící řešil 6 úloh, byla každá dvojice těchto úloh vyřešena více než dvěma pětinami všech soutěžících. Navíc žádný soutěžící nevyřešil všechny úlohy. Ukažte, že existují alespoň dva soutěžící, kteří vyřešili přesně 5 úloh. (IMO 2005–6)

Úloha 11. Každé straně b konvexního mnohoúhelníku P přiřadíme maximální obsah trojúhelníku, který celý leží v P a jehož jedna strana je b. Dokažte, že součet obsahů přiřazených všem stranám mnohoúhelníku P je větší nebo roven dvojnásobku obsahu mnohoúhelníku P. (IMO 2006–6)

Úloha 12. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou navzájem různá kladná celá čísla a M je množina $n-1$ kladných celých čísel neobsahující číslo $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Luční kobylka skáče podél číselné osy, přičemž začíná v bodě 0 a provede doprava n skoků o délkách $a_1, a_2, \ldots a_n$ v určitém pořadí. Dokažte, že pořadí skoků lze zvolit tak, že se kobylka neoctne na žádném čísle z množiny M. (IMO 2009–6)

Úloha 13. Je dána posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kladných reálných čísel. Nechť s je celé kladné takové, že pro všechna $n > s$ platí

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Dokažte, že pak existují kladná celá N a l $(l \leq s)$ taková, že $a_n = a_l + a_{n-l}$ pro všechna $n \geq N$. (IMO 2010–6)

Úloha 14. Mějme celé číslo $n \geq 3$ a $n+1$ bodů rovnoměrně rozložených na kružnici. Uvažujme taková označkování těchto bodů číselnými znaky $0, 1, \ldots n$, ve kterých je použit každý z těchto znaků právě jednou. Dvě označkování považujeme za stejná, jestliže jedno přejde na druhé nějakou rotací kružnice. Označkování nazveme *krásným*, jestliže pro libovolné čtyři znaky $a < b < c < d$ takové, že $a + d = b + c$, tětiva spojující body označené znaky a a d neprotíná tětivu spojující body označené znaky b a c.

Nechť M značí počet krásných označkování a N počet uspořádaných dvojic (x, y) kladných celých čísel takových, že $x + y \leq n$ a $\mathrm{NSD}(x, y) = 1$. Dokažte rovnost

$$M = N + 1.$$

(IMO 2013–6)

Návody

1. Ukažte, že před k-tým dnem od konce je množství medailí vyjádřitelné jako

$$(k+1)n + \left(\frac{n}{6} - 1\right) P_k\left(\frac{1}{6}\right),$$

kde P_k je monický polynom stupně $k-1$. Jediná možnost vyjde $n = 6$, $m = 36$.

2. Uvažte cifru v binárním zápisu čísla n na k-té pozici (tedy udávající počet 2^k). Uvědomte si, že tato cifra bude v nekonečné sumě započtena jako

$$2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1 + 1 = 2^k.$$

Výsledkem je tedy samotné číslo n.

3. Uvažte sloupec/řádek s nejmenším součtem. BÚNO se jedná o řádek a součet jeho čísel je k. Pak umíte součty $n-k$ sloupců (z nul v daném řádku) zdola odhadnout jako $n-k$ a součet zbylých k sloupců (z minimality) pomocí k.

4. Představte si postupné kreslení této čáry. Po dokončení (uspokojení všech bodů) jedné strany čtverce budou dvě protější strany načaté, ale nedokončené. Z toho musí existovat cesta k jedné straně a zpátky, která bude dlouhá 198.

5. V permutaci bez vlastnosti P dejte první prvek k jeho „kamarádovi“. Tím získáte prosté zobrazení z permutací bez P do permutací s P.

6. Na protější strany dáme vždy po sobě jdoucí čísla. Tím převedeme úlohu na hledání rovnoúhlého $5 \cdot 199$-úhelníku, kterému dáváme délky stran $1, 5, 9, \ldots, 2 \cdot 1990 - 1$. Tyto délky rozdáme tak, že jedné skupině stran, jejichž směry tvoří pravidelný pětiúhelník, dáme délky $1, 5, 9, 13, 17$, další (o 1 kousek pootočené) $21, 25, 29, 33, 37$, atd.

7. Zvolte A jako množinu všech čísel, která mají vyšší počet prvočíselných dělitelů, než je hodnota toho nejmenšího prvočíselného dělitele.

8. Zvolte libovolnou p-prvkovou podmnožinu, která má nějaký prvek $\leq p$ a nějaký prvek $> p$. Rozmyslete si, že existuje právě jedno „protočení“ prvků větších než p, aby součet celé množiny byl dělitelný p.

9. Platí $p \equiv q \pmod{p+q}$, proto je modulo $p+q$ posloupnost tvaru $0, p, 2p, \ldots$, a tedy je (při tomto modulo) $(p+q)$-periodická. BÚNO $x_{p+q} > 0$. Pak je možné ukázat, že za předpokladu neexistence hledaných indexů stále platí $x_{i+(p+q)} > x_i$, což dá spor s $x_n = 0$.

10. Jednoho takového soutěžícího dostanete snadno z dvojího počítání dvojic: (soutěžící, vyřešená dvojice úloh). Dále předpokládejte, že každý soutěžící vyřešil alespoň 4 úlohy. (Jinak mu je beztrestně dodáte.) Pokud již máte jednoho soutěžícího s pěti úlohami, dívejte se na úlohy jako na vrcholy grafu, na dvojice úloh jako na spojnice mezi nimi. Soutěžící odpovídají 4-klikám a 5-klikám v tomto grafu. Po položení 5-kliky je třeba pokládáním zbylých 4-klik zastoupení hran v položených klikách co nejvíce vyvážit (z dvojího počítání vyjde, že až na jednu o 1 víc zastoupenou hranu musí být všechny zastoupeny stejně). Avšak to není možné z důvodu, že v rámci 4-kliky má každý vrchol stupeň 3, a proto výsledné stupně budou dávat zbytky po dělení třemi pouze na základě 5-kliky.

11. Uvědomte si, že úloze je ekvivalentní slabší tvrzení: V $2n$-úhelníku s obsahem S vždy najdete jeden trojúhelník s obsahem alespoň S/n. Kdykoli byste totiž měli protipříklad na původní úlohu, dokážete vhodným porozdělováním hran vyrobit protipříklad k tomuto tvrzení. Toto slabší tvrzení dokážete nakreslením hlavních úhlopříček a pokrytím $2n$-úhelníku pomocí „motýlů“ ze sousedních hlavních úhlopříček (je třeba si rozmyslet, že těmito motýly se n-úhelník skutečně pokryje). Z motýla o obsahu alespoň S/n pak vznikne samotný trojúhelník o obsahu alespoň S/n.

12. Dokazujte indukcí podle počtu skoků. Skákejte první skok nejdelším skokem a rozeberte na tři případy. Případ, kdy prvním skokem přeskočíte několik „min“ a na jednu spadnete, vyřešte posunutím všech přeskočených min o délku tohoto skoku a po použití indukčního předpokladu prohozením prvních dvou skoků.

13. Každé číslo a_n můžeme rozepsat jako součet

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s, \tag{1}$$

přičemž platí

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + s\alpha_s = n. \tag{2}$$

Způsobů, jak a_n takto rozepsat, může být více, nikdy se však nemůže stát, že by pro nějakou volbu $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ splňující (2) vyšla hodnota v (1) vyšší. Z toho odvoďte, že kdykoli je α_i nenulové, musí $a_n = a_{n-i} + a_i$. Hledané l zvolte libovolné takové, aby byla hodnota a_l/l nejvyšší možná. Pak kdykoli máte rozepsané a_n a hodnota některého $\alpha_i \geq l$, je možné při nesnížení hodnoty (1) a zachování vztahu (2) snížit α_i o l a zvýšit α_l o i, čímž dosáhnete rozepsání s nenulovým α_l.

14. Indukcí dokažte, že všechna krásná označkování vzniknou zvolením reálného čísla $r \in (0, 2\pi)$ a následným skákáním po jednotkové kružnici o r a postupným psaním čísel $1, 2, \ldots n$. Množinu N dvojic bijektivně zobrazte na takové skoky r, pro které se některé body překryjí. Zbytek nahlédněte.