IMO 1 (mod 3)

David Hruška

Abstrakt. Příspěvek obsahuje zadání nejjednoduších úloh z IMO (mezinárodní matematické olympiády) a návody k jejich řešení.

V obou soutěžních dnech jsou účastníkům IMO předloženy k řešení tři úlohy, které by měly být seřazené vzestupně podle obtížnosti. I když jsou všechny nepochybně na úrovni, vyřešení nejjednodušších dvou z nich (tedy první a čtvrté) často stojí na jednom dobrém nápadu a základních znalostech[1], a přitom již většinou zajišťuje dostatečně vysoké umístění na bronzovou medaili.

Cílem této přednášky je se tyto úlohy „naučit řešit". Neděláme si samozřejmě ambice na nalezení nějakého obecného návodu, ale pokusíme se zvyknout si na jejich styl, obtížnost a další zákonitosti. Hlavně se jich ale naučíme nebát tak, že jich během přednášky co nejvíc vyřešíme, nebo se alespoň necháme k řešení dovést.

Úloha 1. Trojúhelník BCF má pravý úhel u vrcholu B. Nechť A je bod na přímce CF takový, že $|FA| = |FB|$, a bod F leží mezi body A a C. Nechť D je bod takový, že $|DA| = |DC|$ a přímka AC je osou úhlu DAB. Dále nechť E je takový bod, že $|EA| = |ED|$ a přímka AD je osou úhlu EAC, a nechť bod M je středem úsečky CF. Konečně nechť je X bod takový, že $AMXE$ je rovnoběžník. Dokažte, že přímky BD, FX a ME se protínají v jednom bodě. (IMO 2016 – 1)

Úloha 2. Množinu kladných celých čísel nazveme *voňavou*, jestliže obsahuje alespoň dva prvky a libovolný její prvek má nějakého (i více) společného prvočíselného dělitele s alespoň jedním jiným jejím prvkem. Uvažme polynom $P(n) = n^2 + n + 1$. Určete nejmenší celé kladné b, pro které existuje celé nezáporné a tak, že množnina

$$P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)$$

je voňavá. (IMO 2016 – 4)

Úloha 3. Konečnou množinu $\mathcal{S}$ bodů v rovině nazveme *vyváženou*, jestliže pro libovolné dva různé body A a B z $\mathcal{S}$ existuje v $\mathcal{S}$ takový bod C, že $|AC| = |BC|$.

[1] Které člověk získá třeba ročním poctivým řešením nějakého dobrého m/Matematického korespondenčního semináře.

Množinu $\mathcal{S}$ nazveme *středuprostou*, jestliže pro žádné tři různé body A, B a C z $\mathcal{S}$ neexistuje v $\mathcal{S}$ bod P takový, že $|PA| = |PB| = |PC|$.

(i) Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 3$ existuje vyvážená množina obsahující právě n bodů.

(ii) Určete všechna přirozená čísla $n \geq 3$, pro něž existuje vyvážená středuprostá množina obsahující právě n bodů.

(IMO 2015 – 1)

Úloha 4. Trojúhelníku ABC je opsána kružnice Ω se středem O. Přitom kružnice Γ se středem A protne úsečku BC v bodech D a E takových, že body B, D, E a C jsou různé a leží na přímce BC v tomto pořadí. Kružnice Γ a Ω se protínají v bodech F a G, přičemž body A, F, B, C a G leží na kružnici v tomto pořadí. Označme K další průsečík kružnice opsané trojúhelníku BDF s úsečkou AB a L další průsečík kružnice opsané trojúhelníku CGE s úsečkou CA. Předpokládejme dále, že přímky FK a GL jsou různé a protínají se v bodě X. Dokažte, že bod X leží na přímce AO. (IMO 2015 – 4)

Úloha 5. Je dána rostoucí posloupnost přirozených čísel $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$ Dokažte, že existuje právě jedno $n \geq 1$ splňující

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

(IMO 2014 – 1)

Úloha 6. Na straně BC daného ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P a Q tak, že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle BCA|$ a $|\sphericalangle CAQ| = |\sphericalangle ABC|$. Body M a N leží po řadě na přímkách AP a AQ, přičemž bod P je středem úsečky AM a bod Q je středem úsečky AN. Dokažte, že přímky BM a CN se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC. (IMO 2014 – 4)

Úloha 7. Dokažte, že pro libovolnou dvojici kladných celých čísel k a n existuje k kladných celých čísel $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (ne nutně různých) takových, že

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

(IMO 2013 – 1)

Úloha 8. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník s průsečíkem výšek H a nechť W je bod na straně BC ($W \neq B$, $W \neq C$). Označme M, resp. N patu výšky z bodu B, resp. z bodu C. Označme dále ω_1 kružnici opsanou trojúhelníku BWN a nechť X je bod na této kružnici takový, že úsečka WX je průměrem kružnice ω_1. Analogicky definujeme kružnici ω_2 opsanou trojúhelníku CWM a bod Y na ní, aby WY byl průměr ω_2. Dokažte, že body X, Y a H leží na přímce. (IMO 2013 – 4)

Úloha 9. Je dán trojúhelník ABC. Nechť J je střed kružnice připsané ke straně BC a nechť M je bod jejího dotyku s touto stranou. Dále nechť K a L značí po řadě body dotyku této kružnice s přímkami AB a AC. Průsečík přímek LM a BJ označme F a průsečík přímek KM a CJ pak G. Dále nechť S je průsečík přímek AF a BC a konečně nechť T je průsečík přímek AG a BC. Dokažte, že M je středem úsečky ST. (IMO 2012 – 1)

Úloha 10. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, pro které platí rovnost

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

pro libovolná celá a, b, c splňující $a + b + c = 0$. (IMO 2012 – 4)

Úloha 11. Pro libovolnou množinu $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ čtyř (po dvou různých) přirozených čísel označme s_A součet $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Dále nechť n_A znací počet dvojic (i, j), kde $1 \le i < j \le 4$ a $a_i + a_j$ dělí s_A. Určete všechny čtyřprvkové množiny A přirozených čísel, pro které je hodnota n_A největší možná. (IMO 2011 – 1)

Úloha 12. Nechť n je celé kladné číslo. Máme dány rovnoramenné váhy a $n + 1$ závaží o hmotnostech $2^0, 2^1, \ldots, 2^n$. V n krocích máme na váhy postupně po jednom umístit všechna závaží. Každý z kroků spočívá ve výběru jednoho ze závaží, které ještě není na vahách, a jeho umístění buď na levou, nebo na pravou misku vah tak, aby obsah pravé misky nebyl nikdy těžší než obsah levé. Kolik různých posloupností takovýchto n kroků existuje? (IMO 2011 – 4)

Úloha 13. Určete všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$ pro libovolná reálná x, y. (IMO 2010 – 1)

Úloha 14. Nechť bod P leží uvnitř trojúhelníku ABC. Přímky AP, BP a CP protínají kružnici Γ opsanou trojúhelníku ABC po řadě v bodech K, L a M (různých od A, B, C). Tečna ke kružnici Γ v bodě C protíná přímku AB v bodě S. Dokažte, že pokud mají úsečky SC a SP stejnou délku, pak jsou stejně dlouhé i úsečky MK a ML. (IMO 2010 – 4)

Co jsme se o nejlehčích úlohách z IMO tedy dozvěděli? Autora napadá například toto:

(i) Jedna z úloh 1 (mod 3) bývá geometrie řešitelná úhlením (případně mocností, což je ale skoro to samé), které ale může být trochu záludné,
(ii) pokud se na těchto pozicích objeví funkcionální rovnice, mělo by stačil přemýšlet a dosazovat,
(iii) je-li v zadání přirozené číslo, je dobré zvážit indukci,
(iv) pokud se na těchto pozicích objeví nějaká teorie čísel, měli bychom si vystačit s dělitelností a odhodláním to dopočítat.

A nakonec rada působící v tomto kontextu možná zvláštně, rada obecně platná pro matematické (a podobné) soutěže: ať už se zadavatelé snaží seřadit úlohy podle obtížnosti jakkoliv, nikdy se toto pořadí nemusí přesně shodovat s vašimi zkušenostmi a schopnostmi, takže se nikdy nesnažte vyřešit první úlohu za každou cenu, pokud jste ostatním věnovali zatím jen minimum času.

Návody

1. Lépe popište divně definované body D, E a X. Podívejte se místo přímek jen na úsečky BD, FX a ME a zjistěte, co o nich platí. Jak se dá dokázat, že tři přímky prochází jedním bodem?

2. Jaká prvočísla mohou „soudělit“ daná čísla? Použijte Euklidův algoritmus. Najděte nejmenší b, pro které jdou dělitelnosti vůči zmíněným prvočíslům nakombinovat? Jaké tvrzení umožňuje předepisovat zbytky?

3. Konstrukce v i) i v ii) je snadná. Pro zbytek ii) vyrobte úplný graf na S a každou hranu obarvěte barvou odpovídající „středu“ jejích krajních vrcholů. Co musí pro toto obarvení platit?

4. Vyúhlete, že XFG je rovnoramenný.

5. Prostřední člen je průměr a něco málo navíc. Zkuste v nerovnostech toto něco málo osamostatnit a uvažte posloupnost $b_n := (a_n - a_1) + (a_n - a_2) + \cdots + (a_n - a_n)$.

6. Dokreslete středy AB a AC a těžnicemi vyrobte podobné trojúhelníky.

7. Indukce podle k s rozebráním podle parity n.

8. Dokreslete druhý průsečík P (existuje?) kružnic ω_1 a ω_2 a dokažte, že A leží na jejich chordále PW. Dále dokreslete kružnici nad průměrem AH.

9. Dokažte, že čtyřúhelník $AFJL$ je tětivový.

10. Vypočítejte $f(0)$, zvolte $f(1)$ a indukcí dopočítejte všechny zbylé hodnoty.

11. Ukažte, že musí být $n_A \leq 4$ a najděte řešení.

12. Hodil by se rekurentní vztah. Použijte vztahu $2^k > 1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}$.

13. Stačí dosazovat.

14. Z mocnosti je SP tečna opsané ABP. Z toho pomocí úsekových úhlů máme $KL \parallel SP$. Dokreslete střed O kružnice Γ a z $OC \perp CS$ vyvoďte $SP \perp OM$.

Literatura a zdroje

[1] Oficiální stránky IMO, *https://www.imo-official.org/problems.aspx*
[2] web Art of Problem Solving, *https://artofproblemsolving.com*