Hyperčísla

Mirek Olšák

Abstrakt. Občas je užitečné přidat k číslům nekonečno. Jenže když přidáme jenom jedno, budeme mít problém s výrazy jako $1 + \infty - \infty$. V tomto příspěvku to vyřešíme tím, že přidáme nekonečen víc. Přidáme jich dokonce tolik, že vůbec nebude poznat, že jsme nějaká přidali. Na závěr se podíváme na použití takových čísel.

Pro začátek trocha teorie

Všechny podmnožiny množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ si rozdělíme do dvou skupin: na dobré (zapíšeme $\ddot\smile$) a špatné (zapíšeme $\ddot\frown$). Nepopíšeme sice přesně, které množiny budou které, ale uděláme to tak, aby pro libovolné množiny $A, B \subset \mathbb{N}$ a libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$ platilo:

$$A\ddot\smile \Leftrightarrow (\mathbb{N} \setminus A)\ddot\frown \qquad \text{neboli} \qquad A\ddot\frown \Leftrightarrow (\mathbb{N} \setminus A)\ddot\smile$$

$$(A\ddot\smile \wedge B \supset A) \Rightarrow B\ddot\smile \qquad\qquad (A\ddot\frown \wedge B \subset A) \Rightarrow B\ddot\frown$$

$$(A\ddot\smile \wedge B\ddot\smile) \Rightarrow (A \cap B)\ddot\smile \qquad\qquad (A\ddot\frown \wedge B\ddot\frown) \Rightarrow (A \cup B)\ddot\frown$$

$$\{n\}\ddot\frown$$

Pokud by čtenáře zajímalo, proč je možné množiny takto rozdělit, doporučuji si zjistit něco o takzvaných ultrafiltrech.

A jdeme na věc

Definice. Přirozeným hyperčíslem rozumíme libovolnou posloupnost přirozených čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Analogicky můžeme definovat reálná hyperčísla. Dvě hyperčísla a, b považujeme za stejná, pokud se shodují na dobré množině, čili $\{i : a_i = b_i\}\ddot\smile$. Funkce (například sčítání, násobení) hyperčísel definujeme po složkách. Standardní čísla ztotožňujeme s konstantní posloupností daného čísla, ostatní hyperčísla nazýváme nestandardní.

Hyperčísla se chovají stejně jako standardní čísla

K pochopení tohoto neformálního tvrzení je třeba se seznámit s několika základními pojmy z matematické logiky, které si intuitivně vysvětlíme.

Definice. Formulí rozumíme konečný syntakticky korektní zápis, který je možné brát jako logický celek v tom smyslu, že jednotlivé formule je možné spojovat logickými spojkami. Tedy například $1 + 1$ není formule, ale $1 + 1 = 3$ už je formule. Formule může obsahovat

(i) funkční symboly $+, -, \cdot, \dots,$
(ii) rovnítka $=$,
(iii) logické spojky $\wedge, \vee, \Rightarrow, \dots,$
(iv) kvantifikátory $\forall, \exists$,
(v) proměnné $a, b, x_1, \dots,$
(vi) konstanty $0, 1, 2, \dots$

Ne všechny proměnné přitom musí být kvantifikovány.

Příklad. Formulemi tedy mohou být například

$$x = 4, \quad a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c, \quad \exists x\,(y = x \cdot x),$$

$$\forall a\, \exists b\, \forall c\, \forall d\, (c \cdot d = a + b \Rightarrow (c = 1 \vee d = 1)).$$

Formule je jen jakýsi formální zápis, který sám o sobě nic neznamená. Smysl dostane v okamžiku, kdy zvolíme takzvanou *strukturu*. To je množina, přes kterou chápeme kvantifikace, a která má navíc definované významy funkčních symbolů. Příkladem struktury jsou třeba standardní přirozená čísla $\mathbb{N}$. Jinou strukturou jsou pak například přirozená hyperčísla, která budeme značit $\mathbb{N}^*$.

V okamžiku, kdy navíc přiřadíme všem nekvantifikovaným proměnným ve formuli daný prvek struktury, můžeme hovořit o pravdivostní hodnotě. Skutečnost, že formule φ platí ve struktuře A při ohodnocení nekvantifikovaných proměnných prvky $a^1, a^2, \dots, a^n \in A$, zapisujeme

$$A \models \varphi[a^1, \dots, a^n].$$

Nyní můžeme formulovat kýžené tvrzení mnohem přesněji.

Věta. *Mějme hyperčísla $a^1, a^2, \dots a^k \in \mathbb{N}^*$ a formuli φ o k nekvantifikovaných proměnných. Pak*

$$\mathbb{N}^* \models \varphi[a^1, a^2, \dots, a^k] \iff \{i : \mathbb{N} \models \varphi[a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^k]\}\ \smile.$$

Speciálně, má-li φ všechny proměnné kvantifikované, má v $\mathbb{N}$ i v $\mathbb{N}^*$ stejnou pravdivostní hodnotu.

Použití nekonečných čísel

Nestandardní přirozená hyperčísla jsou větší než jakékoli standardní přirozené číslo. To nám umožňuje některé nekonečné množiny považovat za konečné.

Úloha. Pomocí dané konečné sady konečně velkých dlaždiček umíme pokrýt libovolně velký čtverec (dlaždičky se nepřekrývají, ale můžou vyčuhovat ze čtverce). Dokažte, že pak umíme pokrýt celou rovinu.

Úloha. Z dané nekonečné množiny míčů umíme každou konečnou podmnožinu vtěsnat do jednotkové krychle. Dokažte, že pak je umíme do jednotkové krychle vtěsnat všechny.

Úloha. (Z nekonečné Ramseyovy věty plyne konečná.) Jsou dána přirozená čísla b, k a nekonečný graf. Každému konečnému podgrafu umíme obarvit hrany b barvami tak, aby nevznikla žádná jednobarevná klika (úplný podgraf) velikosti k. Dokažte, že pak je možné obarvit všechny hrany b barvami bez kliky na k vrcholech.

Drobet nestandardní analýzy

Definice. Říkáme, že reálné hyperčíslo je *nekonečně malé*, pokud jeho absolutní hodnota je menší než všechna standardní kladná reálná čísla. Je-li rozdíl dvou reálných hyperčísel $a - b$ nekonečně malý, říkáme, že se tato dvě čísla *přibližně rovnají*, a značíme $a \doteq b$.

Definice. Reálná čísla (na rozdíl například od racionálních) jsou *úplná*. To znamená, že ke každému reálnému hyperčíslu $x \in \mathbb{R}^*$, které není nekonečné velké (tedy $\exists n \in \mathbb{N} : |x| < n$), umíme najít standardní reálné číslo $\mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$ takové, že $x \doteq \mathrm{st}(x)$.

Definice. Říkáme, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá, pokud pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}^*$ takové, že $y \doteq x$, platí i $f(y) \doteq f(x)$.

Definice. Říkáme, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá, pokud pro libovolnou dvojici reálných hyperčísel $x, y \in \mathbb{R}^*$ platí $x \doteq y \Rightarrow f(x) \doteq f(y)$.

Úloha. (Bolzanova věta) Spojitá funkce f někde nabývá záporné hodnoty, někde jinde kladné. Dokažte, že někde nabývá nuly.

Úloha. (Weierstrassova věta) Dokažte, že spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maximální hodnoty.

Úloha. Jsou dány dvě funkce $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňující pro libovolné reálné x z intervalu $\langle 0; 1\rangle$

$$f(x,0) < 0, \quad g(0,x) < 0, \quad f(x,1) > 0, \quad g(1,x) > 0.$$

Dokažte, že pak existují reálná čísla x, y taková, že $f(x,y) = g(x,y) = 0$.

Literatura

[1] *http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperreals*