Hýbání s body a pomocné limitní případy

Franta Konopecký

Úvod

Téma **hýbání s body** je netradiční, prakticky se nepřednáší. Je o technice, díky které můžete geometrické úlohy jak řešit, tak na složitá řešení přijít. Hýbání bodů a limitní případy poskytují neobyčejně silný nástroj, který funguje zhruba na třetinu všech těžších geometrických úloh, což už něco znamená. Také se dá rovnou říct, že hýbání prakticky nefunguje na konstrukční úlohy nebo úlohy, kde je pozice bodů jasně určena. Potřebujete tedy aspoň částečnou volnost. Pokud chcete být motivováni metodu se naučit, zkuste nejprve sami vyřešit *Příklad 21.* a poté si pročtěte vzorové řešení.

Jak pracovat s tímto textem

Text je koncipován tak, aby pokud možno co nejlépe objasnil výhody a samotnou techniku posouvání bodů a zároveň ji naučil čtenáře používat.

Pro dobré zažití doporučuji zkoušet techniku používat, nejprve zkusit příklady řešit bez pomoci, pak využívat hintů a na vzorová řešení se dívat až nakonec. A úplně nejdřív zkuste samozřejmě na třech podrobně zdůvodněných příkladech techniku pochopit a v oddílu **lehčí trénink** patřičně osvěžit.

Cvičení s jednoduchými pohyby

V příkladech budeme ve složitých situacích hýbat několika body naráz, proto si nejprve nacvičíme hýbání na užitečných hýbacích miniúložkách. Jejich řešení najdete v *návodech ke cvičením.*

Cvičení 1. Na zahřátí: V bodech A a B v rovině se stejnou úhlovou rychlostí (a stejným směrem) otáčí dvě nerovnoběžné přímky. Jak se pohybuje jejich průsečík?

Cvičení 2. Po ramenech pravého úhlu kloužou konce zápalky, jak se pohybuje její střed?

Cvičení 3. Jsou dány přímky p, q, na nich pevné body P, Q a dále rovnoměrně se pohybující bod R po přímce p. Jak se v závislosti na pohybu bodu R pohybuje druhý průsečík S kružnice opsané ΔPQR a přímky q?

Cvičení 4. Je dána kružnice a na ní tětiva UV. Pohybuje-li se rovnoměrně bod W po oblouku z bodu U do V, jak se pohybuje střed vepsané kružnice ΔUVW?

Cvičení 5. Uvnitř kružnice se kotůlá dvakrát menší kružnice, na níž leží bod A. Jak se pohybuje bod A?

Cvičení 6. Vedle sebe stojí dvoje stejné hodiny, akorát jedny jdou o čtvrthodinu napřed. Jak se pohybuje střed spojnice konců velkých ručiček?

Cvičení 7. Po dvou kružnicích obíhají stejnou úhlovou rychlostí body M, N (každý po jedné, začátek pohybu je v obecné poloze). Co opisuje bod X úsečky MN, pro který $|MX| = 2|NX|$?

Cvičení 8. Dvě kružnice se protínají v bodech C a D. Bodem C se otáčí přímka, která protíná kružnice v dalších bodech E a F. Jakou množinu opisuje střed úsečky EF?

Cvičení 9. Dvě kružnice se protínají v bodech C a D. Bodem C se otáčí přímka, která protíná kružnice v dalších bodech E a F. Jestliže EFG tvoří rovnostranný trojúhelník, jak se pohybuje bod G?

Vysvětlení techniky pohybů

Následují čtyři kroky, jejichž osnova může při řešení úloh hýbáním pomoct. Až si řešením vypracujete cit pro pohyb, nebude žádná osnova potřeba. K pochopení na začátku je však esenciální.

(i) Nejprve vyřešíme jednoduché speciální případy (speciální poloha bodu, rovnostranný trojúhelník, vhodné postavení ostatních bodů, symetrická pozice, atd.)
(ii) Zkoušíme, po jakých množinách se dá s body hýbat tak, aby se zachovalo zadání a pohnulo se co nejméně bodů nebo vzdáleností. Přitom si všímáme vlastností pozice bodů v úloze.
(iii) Po nalezení vhodného pohybu vyřešíme limitní (krajní) případy.
(iv) Pokusíme se závěr zobecnit do „pohnuté" pozice.

Osnovu si rovnou zažijeme na příkladech, aby se obecné poučky proměnily v činy. Začneme velmi jednoduchým.

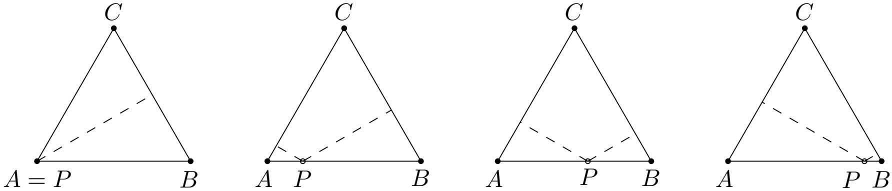
Příklad. Dokažte, že pro libovolný vnitřní bod P rovnostranného trojúhelníku ABC je součet jeho vzdáleností od stran stejný.

Řešení. Postupujme podle návodu.

(i) Speciální poloha je např. na hranici trojúhelníku nebo ve vrcholu. Ač zadání mluví jen o vnitřních bodech, vyřešení pro celý trojúhelník obsáhne i řešení zadané úlohy. Posazení do vrcholu nám řekne, že součet vzdáleností musí být roven velikosti výšky v.

(ii) Při obecném pohybu bodu P se mění všechny tři vzdálenosti. Při pohybu rovnoběžném s nějakou stranou se mění jen dvě, to bude hledaný pohyb.

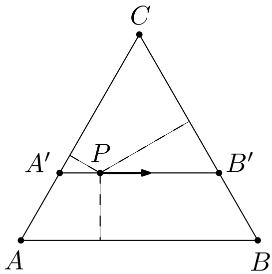
(iii) Nejkrajnější případ je vrchol trojúhelníku. Dalšími krajními případy jsou strany. Pohybujme nyní s bodem P rovnoměrně z A do B. Vzdálenost P od AC se tak rovnoměrně zvětšuje z 0 na v. Vzdálenost P od BC se naopak rovnoměrně při pohybu zmenšuje z v na 0 v krajních bodech. Už toto by téměř stačilo jako důkaz.



Obr. Ia

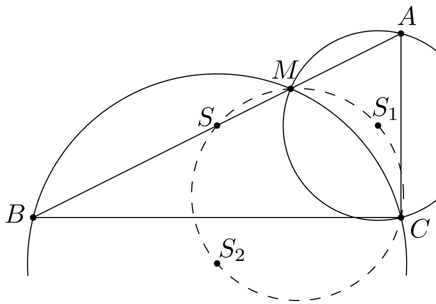
Ve skutečnosti je potřeba dokázat to líp, ale hýbání nám řeklo jak: V závislosti na délce AP se pomocí cosinu vyjádří vzdálenosti od stran a díky tomu, že se rovnoměrně zvětšují a zmenšují při pohybu, dopředu víme, že bude postup fungovat, tj. součet těchto vzdáleností vyjde konstantní.

(iv) Pohyb rovnoběžný se stranou si představme jako pohyb po straně trojúhelníku $A'B'C$, ke kterému je přilepeno $ABB'A'$. Během pohybu se vzdálenost P od AB nemění, takže se díky výsledku v $\Delta A'B'C$ nemění součet vzdáleností ani v celém ΔABC.



Obr. Ib

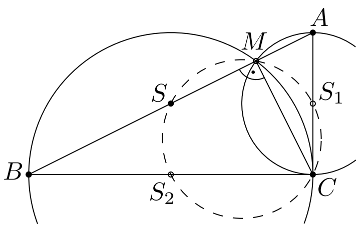
Příklad. Buď M libovolný bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Označme S střed AB a dále S_1, S_2 středy kružnic opsaných trojúhelníkům ACM, BCM. Dokažte, že S, S_1, S_2, M, C leží na jedné kružnici. Pro které M má tato kružnice nejmenší poloměr? (MO 56-II-3)



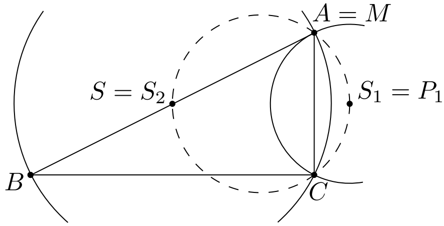
Obr. IIa

Řešení. Opět zkusme jet podle návodu. Předtím ještě označme P_1 průsečík kolmice na AC vedenou bodem A s osou strany AC a P_2 průsečík kolmice na přeponu vedenou bodem B s osou strany BC.

(i) Specifickými polohami jsou $M =$ [pata výšky z C], $M = A$, $M = B$, $M = S$. Pomocí pravých úhlů se v nich lehko ukáže platnost tvrzení. Na obrázcích vidíte první dva případy.

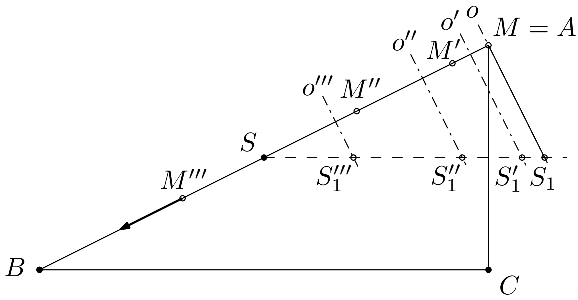


Obr. IIb



Obr. IIc

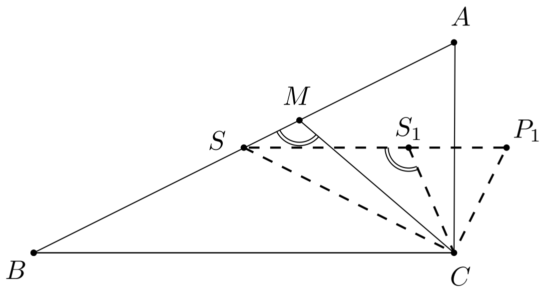
(ii) Tady nemusíme řešit jak hýbat – je jasné, že rovnoměrně bodem M po přeponě. Při tomto pohybu je dobré, že se rovnoměrně hýbou i body S_1, S_2. Bod S_1 je totiž průnik osy úsečky MA a osy strany AC. Osa úsečky MA se pohybuje poloviční rychlostí jako bod M, a díky tomu se rovnoměrně pohybuje i S_1 (kdybychom chtěli být přesní, řekli bychom, že existuje lineární závislost, kterou jde lehce vyjádřit, ale nejlépe ji uvidíme pomocí hýbání).



Obr. IId

(iii) Pro krajní polohu $M = A$ platí $S_1 = P_1$ a $S_2 = S$, pro druhou krajní polohu $M = B$ je $S_1 = S$ a $S_2 = P_2$. Obě tyto pozice bodu M splňují triviálně zadání úlohy a navíc jsou počáteční a koncovou pozicí pohybu bodu M.

(iv) Zvolme nějakou obecnou polohu bodu M. Předchozí hýbání nás navádí buď na spirální podobnost (úsečky AB a P_1S si i s pohyby bodů M a S_1 odpovídají ve spirální podobnosti se středem v C) nebo na všimnutí stejně rychlého měnění úhlů $\sphericalangle CMS$ a $\sphericalangle CS_1A$.



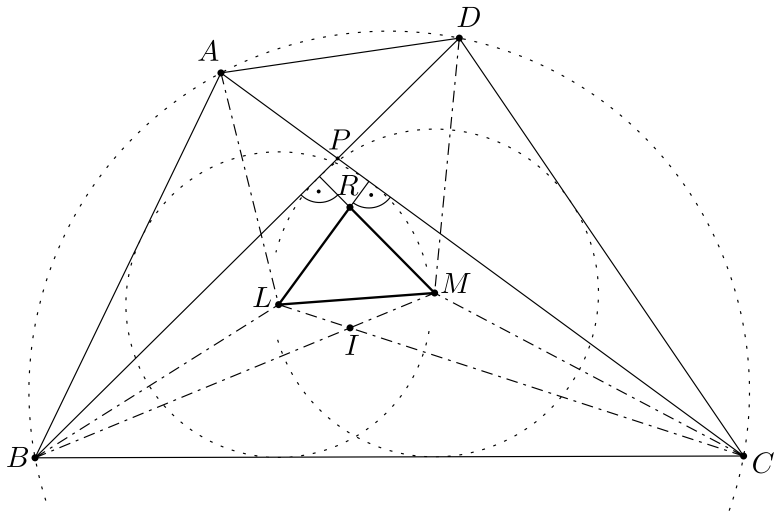
Obr. IIe

Podobnost $\Delta ABC \approx \Delta P_1SC$ dostaneme velice rychle. Z vlastností vzájemně odpovídajícího pohybu bodů M a S_1 máme

$$|AM| : |MB| = |P_1S_1| : |S_1S|,$$

což dává rovnost úhlů $\sphericalangle BMC$, $\sphericalangle SS_1C$ vyznačených na obrázku IIe. Rovnost zmíněných úhlů je ekvivalentní s tím, že S, M, S_1, C leží na kružnici, a analogicky se ukáže, že na téže kružnici leží i bod S_2, čímž je úloha vyřešena.

Příklad. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$, v něm střed L kružnice vepsané trojúhelníku ABC a střed M kružnice vepsané trojúhelníku DBC. Označme l přímku kolmou na AC procházející bodem L, dále m přímku kolmou na BD procházející bodem M a nakonec R průsečík přímek l a m. Dokažte, že je ΔMLR rovnoramenný. (MO 56-III-2)

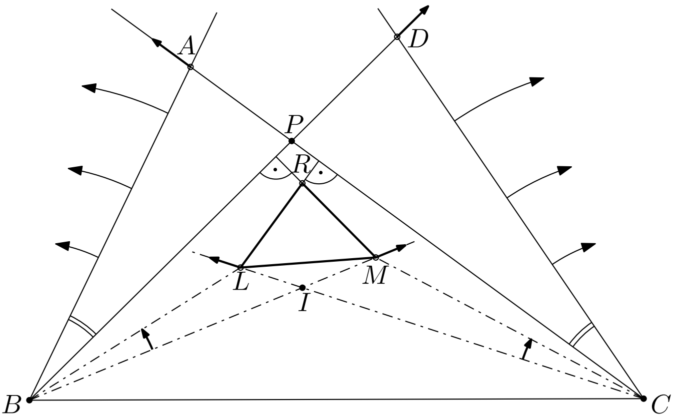


Obr. IIIa

Řešení. Označme ještě P průsečík úhlopříček a I střed vepsané trojúhelníku PBC. Dál postupujme podle návodu.

(i) V případě symetrické pozice se řešení nahlédne ze symetrie, což se bohužel nebude dát rozšířit do obecné pozice … tady tentokrát nepochodíme.

(ii)–(iii) Hýbání je v této úloze složitější. Nabízí se hýbání bodem A po kružnici (aby $ABCD$ zůstal tětivový), ale při něm se hýbou důležité body L a R příliš rozdílně. Proto (předčasně) už v kroku (ii) nahlédněme limitní pozici degenerovaného případu $A = D = P$. V ní nastane zároveň $L = M = R = I$. A teď s ní zkusme nějak pohnout, aby se body pohybovaly „hezky“. Tím hezkým pohybem je ponechání pevného trojúhelníku PBC a otáčení s polopřímkami $\mapsto BA$ a $\mapsto CD$ stejnou úhlovou rychlostí, ale opačným směrem. Při tomto pohybu zůstává $ABCD$ tětivový a body L a M se pohybují navzájem odpovídajícím způsobem po pevných osách úhlů $\sphericalangle PCB$ a $\sphericalangle PBC$.



Obr. IIIb

To už je hledaný hezký pohyb, který dořešíme v následujícím bodu.

(iv) Podle věty uu jsou trojúhelníky BIL a CIM podobné, takže poměr $|LI| : |MI| = |BI| : |CI|$ je při pohybu konstantní, což znamená, že přímka LM má při našem pohybu pořád stejný směr. Zbývá dokázat, že je to pro rovnoramennost trojúhelníku LMR ten správný směr – směr svírající se zadanými kolmicemi l a m stejný úhel; směr kolmic l, m se totiž nemění, jsou určeny přímkami AC a BD. Vlastně stačí dokázat, že $LM \perp PI$ (PI je totiž osou $\sphericalangle BPC$ a svírá s přímkami l a m stejný úhel). A $LM \perp PI$ už dostaneme po krátkém počítání úhlů (nejdříve spočtením úhlu přímek LM a BC – přes tětivový čtyřúhelník $BCML$, poté úhlu přímek BC a PI – využitím faktu, že PI je osou úhlu).

Shrnutí techniky

Při řešení úloh hýbáním **si všímejte degenerovaných případů**, **krajních poloh** a **speciálních případů**. Když se vám budou zdát jasné (že v nich zadání skoro zřejmě platí), tak s nimi zkuste nějakým způsobem pozicí pohnout, aby se body hýbaly „hezky“ a abyste dostali všechny obecné případy, na které se úloha vztahuje.

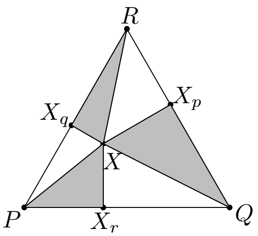
Taky pamatujte, že **samotné hýbání často nic nedokazuje**. Ale v naprosté většině případů vám dá návod, jak pomocí poměrů, podobností, posunutí, krajních případů nebo nějakých invariantních vlastností úlohu řešit.

Lehčí Trénink

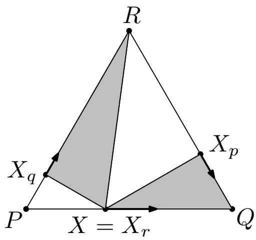
V následujících úlohách si trénujte cit pro nalezení a pochopení pohybu a jeho využití. Spíš než na samostatné řešení se soustřeďte na důkladné zdůvodnění, že vám pohyb poskytnutý v návodu už dává řešení nebo myšlenku řešení.

Příklad 1. V rovnostranném trojúhelníku PQR je uvnitř bod X. Z něj vedou na strany p, q a r kolmice s patami X_p, X_q a X_r. Dokažte, že součet obsahů trojúhelníků XPX_r, XQX_p a XRX_q je polovina obsahu celého trojúhelníku PQR. (Myreg 2009)

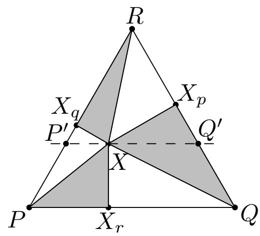
Návod.



Obr. 1a



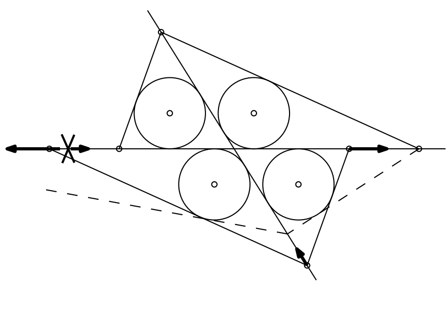
Obr. 1b



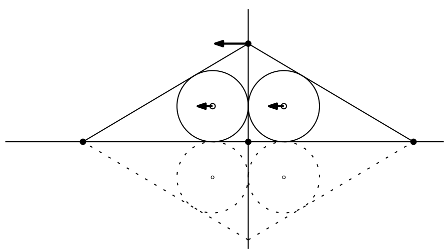
Obr. 1c

Příklad 2. Ve čtyřúhelníku $EFGH$ s průsečíkem úhlopříček P jsou trojúhelníkům EFP, FGP, GHP a HEP vepsány kružnice. Dokažte, že jestliže jsou tyto kružnice shodné, tak je čtyřúhelník kosočtvercem. (PraSe 26-6-6)

Návod. Začněte ukázkou půlení se úhlopříček (spojováním bodů do čtyřúhelníku ze symetrické pozice) a pokračujte kolmostí úhlopříček (sledováním stejného obsahu trojúhelníků, stejných poloměrů vepsaných kružnic a vzrůstajícího rozdílu v obvodu trojúhelníků (vzpomeňte na vzorec $S = (o \cdot r)/2$)).



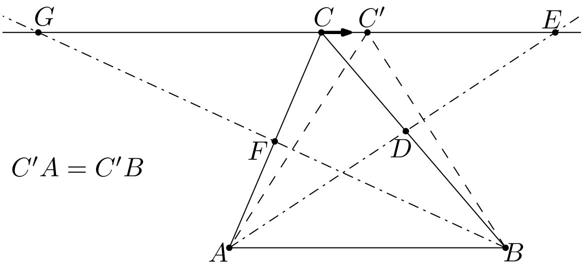
Obr. 2a



Obr. 2b

Příklad 3. ABC je trojúhelník s osami úhlů AD a BF. Přímky AD a BF protínají přímku rovnoběžnou s AB vedenou bodem C po řadě v bodech E, G. Z předpokladu $|FG| = |DE|$ vyvoďte $|CA| = |CB|$. (shortlist 1990/12.)

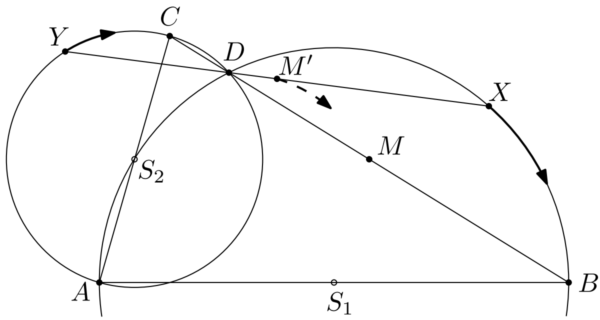
Návod. Zkoumejte vzájemnou změnu délek $|FG|$, $|DE|$ při hýbání do symetrické polohy.



Obr. 3

Příklad 4. Jsou dány kružnice k_1 a k_2 nad průměry AB a AC. Průsečíkem D obou kružnic ($D \neq A$) je vedena přímka, která protíná k_1 podruhé v bodě X ($X \neq D$) a k_2 podruhé v bodě Y. Body M a M' jsou po řadě středy úseček BC a XY. Ukažte, že $\sphericalangle AM'M$ je pravý úhel. (PraSe 26-6-8)

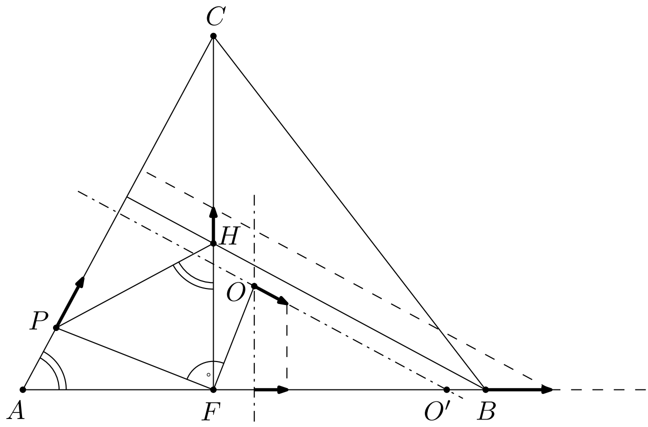
Návod. Otáčejte rovnoměrně přímkou XY a zkoumejte pohyb bodu M'.



Obr. 4a

Příklad 5. Trojúhelník ABC je ostroúhlý s $|BC| > |AC|$. Označme O střed opsané, H ortocentrum, F patu výšky z C. Přímka kolmá na FO vedená bodem F protíná stranu AC v bodě P. Ukažte, že $|\sphericalangle FHP| = \alpha$. (shortlist 1996/12.)

Návod. Začněte v limitní poloze $|BC| = |AC|$ a pohybujte se podle obrázku do limitní polohy $P = C$.



Obr. 5

Další příklady vhodné na hýbání s body

Pokud ještě pořád nejste přesvědčeni o síle prezentované metody, tak velmi doporučuji zkusit řešit **příklady 14.** a **21.** a poté si důkladně nastudovat vzorové řešení.

Lehké

Příklad 6. Je dána kružnice $k(S, r)$ a na ní body M, N takové, že úhel MSN je ostrý. Libovolným bodem X menšího z oblouků MN veďme rovnoběžku s přímkou MS a označme Y její průsečík s úsečkou SN. Sestrojte takový bod X, pro který je obsah trojúhelníku SXY maximální. (MO 50-II-3)

Příklad 7. Který trojúhelník s jednotkovým obvodem má největší obsah?

Příklad 8. V rovnostranném trojúhelníku KLM o obsahu S je libovolně bod N. Buď K', L' a M' body po řadě na stranách KL, LM a MK takové, že $NK' \parallel MK$, $NL' \parallel KL$ a $NM' \parallel LM$. Průsečíky os úseček NK', NL' a NM' tvoří vrcholy trojúhelníku o obsahu T. Ukažte, že $S = 3T$. (MO 55-I-2)

Příklad 9. Kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ se dotýkají v bodě T a je $r_1 < r_2$. Body A, B leží po řadě na kružnicích k_1, k_2 tak, že je úhel $\sphericalangle ATB$ pravý. Dokažte, že všechny možné přímky AB procházejí jedním bodem a najděte množinu středů úsečky AB. (MO 57-II-2)

Příklad 10. Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ takový, že AB je průměr kružnice opsané, O je střed AB, P je průsečík úhlopříček a platí, že $|\sphericalangle APB| = 2|\sphericalangle COD|$. Tečny v bodech C, D se protnou v dalším bodě Q. S faktem, že $|AB| = 2$, určete vzdálenost $|OQ|$. (PraSe 26-6-5)

Příklad 11. Je dán rovnoběžník, jehož stranám jsou z vnějšku připsány čtverce. Ukažte, že středy těchto čtverců tvoří další čtverec.

Příklad 12. Najděte nejlepší konstanty p, q takové, že

$$p < \frac{a + t_b}{b + t_a} < q$$

platí pro libovolný trojúhelník se stranami a, b a jim příslušnými těžnicemi t_a, t_b. (MO 57-III-6)

Střední

Příklad 13. Pro dané číslo n najděte n-úhelník, který bude mít obvod 1 a co největší obsah. (Zajímavý známý příklad)

Příklad 14. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhlopříčky stejně dlouhé. Ukažte, že pokud vně každé straně připíšeme rovnostranný trojúhelník, tak jsou spojnice protějších středů těchto trojúhelníků na sebe kolmé. (shortlist 1992/5.)

Příklad 15. V nerovnoramenném trojúhelníku TUV jsou na stranách UV, TV po řadě body P, Q tak, že je čtyřúhelník $TUPQ$ tětivový. Příčky TP a UQ se protínají v bodě X. Dokažte, že leží-li bod X na výšce z bodu V, tak je už nutně ortocentrem trojúhelníku TUV. (MO 56-III-5)

Příklad 16. Ukažte, že existuje konečná množina bodů M rovině taková, že pro libovolný bod P z M existuje právě 2009 bodů množiny M, které mají od P vzdálenost 1. (shortlist 1993/1.)

Příklad 17. Buď S bod na straně AB v ostroúhlém trojúhelníku ABC a dále X, Y po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC. Najděte polohu bodu S, pro niž bude mít trojúhelník SXY minimální obsah. (MO 52-II-2)

Příklad 18. Říkáme, že kružnice k půlí kružnici l, pokud ji protíná v průměru. Jsou dány tři kružnice k_A, k_B, k_C se středy A, B, C. Ukažte, že body A, B, C leží na přímce, právě když neexistuje jednoznačná kružnice, která půlí všechny tři kružnice k_A, k_B, k_C. Dále ukažte, že pokud je více půlících kružnic, tak všechny procházejí jistými dvěma body. (shortlist někde kolem 1991)

Těžší

Příklad 19. Jsou dány rovnoběžné přímky p, q a někde mezi nimi bod A. Bod P se pohybuje po p a bod Q po q tak, že úhel $\sphericalangle PAQ$ zůstává konstantní. Ukažte, že v rovině existuje ještě jeden bod A', pro který se úhel $PA'Q$ nemění. (Pepa 2009)

Příklad 20. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s obvyklým značením úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Poloměr kružnice opsané trojúhelníku BCD označme R_A. Analogicky označme R_B, R_C a R_D. Ukažte, že $R_A+R_C > R_B+R_D$ právě když $\alpha + \gamma > \beta + \delta$. (shortlist 1996/17.)

Příklad 21. Je dán trojúhelník DEF. Kružnice procházející body E, F protíná stranu DE v dalším bodě F' a stranu DF v dalším bodě E'. Buď H ortocentrum DEF a H' ortocentrum $DE'F'$. Ukažte, že se přímky EE', FF' a HH' protínají v jednom bodě. (shortlist 1995/G8)

Hinty k příkladům

Pokud dlouho bušíte do úlohy, ale i tak nechcete vidět přímo řešení, jsou tu pro vás hinty.

1. Vyřešte zvlášť pro polohu $X = X_r$ a zvlášť v $PQQ'P'$. **2.** Hint nedorazil. **3.** Chování $|AF| : |FC|$. **4.** Spirální podobnost (nebo využití pohybu vektorů $\overrightarrow{S_1X}$ a $\overrightarrow{S_2Y}$). **5.** Rovnoměrný pohyb PH, vzájemná stejnolehlost jejích různých poloh. **6.** Konstantní strana, úhel. **7.** Elipsa. **8.** Krajní případ. **9.** Stejnolehlost. **10.** $C \to B$. **11.** Start z obdélníku. **12.** Degenerovaný případ; případy $b \geq t_a$ a $t_a > b$. **13.** Elipsa a potom správně rozřezat obsah. **14.** Degenerovaný začátek, spirální podobnost. **15.** Cevova věta. **16.** Indukce. **17.** Podobnost s ABC. **18.** Mocnost. **19.** Bod A na ekvidistantě; zobrazit Q na p, pak rodina kružnic opsaných $PQ'A$. **20.** Chování $R_A + R_C - R_B - R_D$; případy $\max\{\beta, \delta\} < 90°$ a $\max\{\beta, \delta\} \geq 90°$. **21.** Pohyb průsečíkem kolmo na osu $\sphericalangle EDF$; EE', FF' rovnoběžně.

Literatura

Tento text byl sepsán bez pomoci literatury, je tedy původní. Příklady jsem čerpal především ze starších ročníků PraSátka, archivu olympiády a IMO shortlistů. V asi dvojnásobné podobě (i s kompletními řešeními příkladů a cvičení a asi patnácti dalšími obrázky) tento text zanedlouho najdete v knihovně PraSátka na našich stránkách.