Hry s barevnými grafy

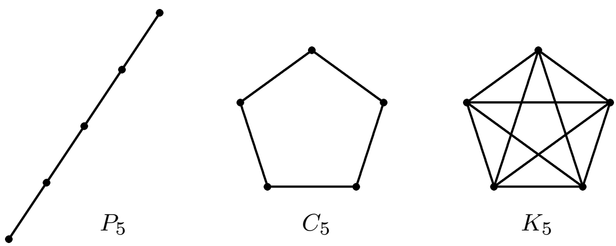
David Stanovský

Ne každý moderní matematický problém musí být těžký a nesrozmitelný. S jedním vás nyní seznámím. Půjde o hru, ve které se budou barvit vrcholy daného grafu. Ujasněme si tedy nejprve, o jaké grafy půjde (pro naše účely stačí neformální a nepřesné, zato však názorné definice).

Mé grafy nijak nesouvisí s funkcemi. *Grafem* budu myslet obrázek v rovině sestávající z bodů (zvané *vrcholy*) spojených čárami (zvané *hrany*), přičemž každá hrana spojuje právě dva vrcholy. Množinu vrcholů označím $V(G)$, množinu hran $E(G)$. Graf G je reprezentován dvojicí množin (V, E).[4] *Obarvení grafu k barvami* znamená, že každý vrchol obarvím jednou z k daných barev tak, aby vrcholy spojené hranou měly různé barvy.[5] Nejmenší k takové, že daný graf G má obarvení k barvami, nazýváme *barevnost* grafu a značíme ho $\chi(G)$.

Příklad.

(1) *cesta* P_n má n vrcholů spojených hranami od prvního k poslednímu
(2) *kružnice* C_n má n vrcholů spojených hranami dokola
(3) *strom* je libovolný graf, ve kterém se nevyskytuje kružnice
(4) *úplný* graf K_n má n vrcholů a každé dva vrcholy jsou spojeny hranou
(5) *rovinný* graf je takový, který lze nakreslit v rovině bez křížení hran



$\chi(P_n) = \_\_$, $\quad \chi(C_{2n}) = \_\_$, $\quad \chi(C_{2n+1}) = \_\_$
$\chi(\text{strom}) \leq \_\_$, $\quad \chi(K_n) = \_\_$, $\quad \chi(\text{rovinný}) \leq \_\_$

Hru, kterou budeme studovat, vymyslel pan Bodlaender v roce 1991. Hrají ji 2 hráči, třeba Alice a Bob, na daném grafu G s daným počtem barev k. Označme

[4] Formální definice: *graf* je dvojice (V, E), kde V je libovolná konečná množina a E je nějaký systém dvouprvkových podmožin V.

[5] Formální definice: *obarvení grafu k barvami* je funkce $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ taková, že kdykoliv $\{x, y\} \in V$, pak $f(x) \neq f(y)$.

tuto hru $H(G,k)$. Alice chce obarvit graf G danými k barvami, Bob se jí to snaží sabotovat. Začína Alice, obarví libovolný vrchol jednou z daných barev, pokračuje Bob, obarví libovolný neobarvený vrchol, a tak dále, přičemž oba musí dodržovat pravidlo ($\heartsuit$), že *sousední vrcholy musí mít různé barvy*. Alice vyhrává, pokud je graf úspěšně obarven; Bob vyhrává, pokud žádný neobarvený vrchol nelze obarvit při zachování pravidla ($\heartsuit$). Otázka zní: který z hráčů má pro dané G a k vyhrávající strategii?

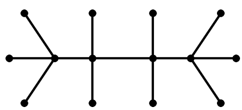
Definujeme tzv. *hrací barevnost* grafu $h(G)$ jako nejmenší k takové, že Alice má vyhrávající strategii ve hře $H(G,k)$.

Pozorování. *Pro každý graf G platí $\chi(G) \leq h(G) \leq |V(G)|$.*

Nyní budeme hledat hrací barevnost pro různé grafy. Začneme u nejjednodušších grafů (cesty, kružnice), naším cílem pak budou obecně grafy rovinné. Uvidíme, že hledat hrací barevnost je mnohem těžší, než najít barevnost obyčejnou. Zde uvádím pouze přehled výsledků, jejich důkazy nejsou nijak těžké a předvedu je na přednášce.

(1) graf s jedním vrcholem: $h =$ __
(2) cesta délky 2 a 3: $h =$ __
(3) cesta délky ≥ 4: $h =$ __
(4) kružnice délky ≥ 3: $h =$ __
(5) úplný graf na n vrcholech: $h =$ __
(6) stromy, rovinné grafy: $h =$???

Najít hrací barevnost pro stromy již tak snadné není. Pánové Faigle, Kern, Kierstad a Trotter (1993) zjistili, že každý strom má hrací barevnost nejvýše __, přičemž existuje strom, který má tuto hrací barevnost přesně (ten na obrázku).



To znamená, že pro každý strom T má Alice vyhrávající strategii ve hře $H(T,$ __$)$. Jak na to?

Alice hraje tak, že *každý souvislý podgraf T tvořený dosud neobarvenými vrcholy má nejvýše dva obarvené sousedy*. Proč je to možné? Při prvním tahu může Alice obarvit cokoliv. Později: nechť Bob právě obarvil vrchol u. Musel se s ním trefit do nějakého souvislého neobarveného podgrafu, který měl nejvýše dva obarvené sousedy v, w. Alice bude hrát do bodu, který je společný cestám mezi u, v, w (resp. kamkoliv, pokud $v = w$). Zbývá jí vždy aspoň jedna barva, kterou může použít. Je vidět, že po jejím tahu stále platí uvedená vlastnost. Tímto postupem tedy mohou dohrát hru až k úspěšnému obarvení grafu. Bob nemá šanci.

Nalezení nejmenšího horního odhadu pro barevnost rovinného grafu trvalo 100 let. Dobrý horní odhad pro hrací barevnost rovinného grafu není znám dodnes. Nejlepší odhad dává následující věta, která je letošní novinkou.

Věta. (Dinski, Žu, 1999) *Je-li graf G obarvitelný k barvami tak, že každá jeho kružnice má na sobě aspoň 3 barvy, pak $h(G) \leq k(k+1)$.*

Důkaz této věty je poměrně obtížný. Je třeba nalézt vyhrávající strategii pro Alici ve hře $H(G, k(k+1))$. Princip její strategie je, že vezme dotyčné obarvení grafu k barvami a snaží se barvit podle něj. Když jí to Bob někde zkazí, zbývá jí dostatek barev, aby to nějak napravila (jak, to je právě ta obtížnost).

Tato věta vyřešila dlouho otevřený problém, zda vůbec existuje nějaká konstantní horní mez hrací barevnosti rovinných grafů. Každý rovinný graf lze totiž uvedeným způsobem obarvit __ barvami, z čehož vychází horní mez $h(G) \leq$ __. Toto číslo je dosti velké (srovnej s obyčejnou barevností) a mělo by jít zmenšit (autorovi nejsou známy rovinné grafy s hrací barevností větší než __). To však zatím nikdo neumí...