

Jak hrát a vyhrát

Robert Šámal

V přednášce si ukážeme efektivní způsob, jak analyzovat hry. U jednodušších her objevíme úplnou strategii, tj. postup, jak o každé pozici poznat, kdo vyhraje a jak má správně hrát. U složitějších alespoň prozkoumáme jednodušší pozice (koncovky) a to nám umožní hrát hru na vyšší úrovni a pravděpodobně porazit toho, kdo naši teorii nezná.

Pravidla her

Dominové dláždění

Dva hráči, Levý a Pravý, střídavě kladou kameny domina (2×1 čtvereček) na hrací plochu, Levý svisle, Pravý vodorovně, jednotlivé kostky se nemohou překrývat. Hrací plocha je nejčastěji mřížka z $n \times n$ čtverečků. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Col

Dva hráči střídavě barví vrcholy grafu (Levý černě, Pravý bíle), přitom není možno obarvit sousední vrcholy stejnou barvou. Kdo nemá tah, prohrál.

Snort

Jako Col, ale zakázáno je obarvit sousední vrcholy různou barvou.

Nim

Dva hráči střídavě odebírají sirky z několika hromádek. V jednom tahu je možno odebrat z libovolné hromádky libovolný počet sirek. (Existuje mnoho variant, kde jsou povoleny jiné tahy.) Kdo nemá tah, prohrál.

Hra bez zlaťáku

Hrací plán tvoří vodorovný pás čtverečků, na některých políčkách jsou mince (žádná z nich není zlaťák). Jeden tah spočívá v posunu libovolné mince o libovolný počet políček doprava, není ovšem možno přeskočit jinou minci, navíc na každém políčku může být nejvýše jedna mince. Kdo nemá tah, prohrál.

Hra se zlaťákem

Hraje se podobně jako minulá hra, jednou z mincí je však zlaťák. Na políčku nejvíce vpravo je měšec, do kterého se vejde libovolný počet mincí. Když jeden hráč vloží do měšce zlaťák, hra končí a druhý hráč si měšec vezme (čili vyhrál).

Pěšcová hra

Hraje se na několika sloupcích šachovnice, na každém je jeden bílý a jeden černý pěšec. Jeden hráč tahá bílými pěšci, druhý černými, tah spočívá v posunu pěšce v rámci sloupce o libovolný počet polí, není možno přeskočit pěšce soupeřova. Kdo nemá tah, prohrál.

Výhonky

Na začátku je na papíře n puntíků. Jeden tah spočívá ve spojení dvou puntíků čarou a nakreslení puntíku někde na nakreslenou čáru. Přitom se žádné dvě čáry nesmějí křížit a z žádného puntíku nesmí vést více než tři čáry. Hráči se pravidelně střídají v tazích, kdo nemá tah, prohrál.

Dopravní hra

Hraje se na orientovaném grafu — plánu měst a jednosměrných silnic mezi nimi, v některých městech jsou auta (libovolný počet v jednom městě). Jeden tah spočívá v posunu libovolného auta po libovolné silnici vedoucí z města, v němž se auto nalézalo. Kdo nemá tah (všechna auta jsou v městě, z něhož nevede cesta ven), prohrál.

Operace s hrami

Z výše uvedených pravidel je už asi jasné, jakými hrami se zde budeme zabývat. Naším cílem je vyvinout metody, které nám umožní u každé hry poznat, kdo vyhraje (při oboustranně správné hře), a pochopitelně také, jaká je správná strategie (slovem strategie zde míníme návod, jak ve které pozici táhnout). Nejprve si ale musíme uvědomit, že vždy existuje pro některého hráče „správná“ strategie.

Věta. *Uvažme hru dvou hráčů, kde každá hra skončí po konečném počtu tahů vítězstvím jednoho z hráčů (tj. nejsou možné remízy ani nekonečné partie). Pak jeden z hráčů má vítěznou strategii.*

Nyní se dohodneme na způsobu zápisu her. Hru hrají dva hráči, Levý a Pravý. Pokud ve hře G může Levý táhnout do pozic A, B, C, \dots a Pravý do D, E, F, \dots , budeme psát $G = \{A, B, C, \dots \mid D, E, F, \dots\}$ (přitom A, \dots jsou opět nějaké hry) (už chápete jména hráčů?). V obecných úvahách budeme často psát jen $G = \{G^L \mid G^R\}$, kde G^L zastupuje typický tah Levého, G^R typický tah Pravého hráče. Pokud hráč nemá tah, prohrál.

Protože nám jde především o to, kdo zvítězí, je přirozené zavést následující definice:

Definice. *Buď G hra. Pokud má Levý vítěznou strategii (nezávisle na tom, kdo začíná), budeme psát $G > 0$ (a říkat, že G je kladná). Pokud má vždy vítěznou*

strategii Právý, pak pišme $G < 0$ a G nazvěme zápornou. Když má vítěznou strategii ten hráč, který nezačíná, pišeme $G = 0$ (G je nulová), a konečně pokud má vítěznou strategii hráč, který začíná, pišeme $G \parallel 0$, G je zmatená)

Užitím předchozí věty zjistíme, že každá hra spadá do jednoho z popsaných typů. Jak ale zjistíme, do kterého? Napřed se musíme naučit se hrami trochu manipulovat. U mnoha her zjistíme, že pozice je složena z několika dílčích pozic, přičemž tahy v jedné části neovlivní část jinou. Jádro naší teorie tvoří hledání výsledku celé hry pomocí analýzy jednotlivých částí. Toto vede k definici součtu her. Všimněte si, že definice součtu přesně odpovídá tomu, že hrajeme na více deskách najednou, přičemž hráč si vždy vybere, na které desce chce táhnout. Dále $-G$ (negace G) je hra, kde „otočíme hrací desku“. Uvědomte si, že negace udělá z kladné hry zápornou (a naopak), z nulové nulovou, ze zmatené zmatenou.

Definice. Jsou-li G, H hry, pak

$$\begin{aligned} G + H &= \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\} \\ -G &= \{-G^R \mid -G^L\} \\ G - H &= G + (-H). \end{aligned}$$

Nyní můžeme definovat nerovnosti (ap.) mezi dvěma hrami. Podivným se může zdát především to, že definujeme, co to znamená, že dvě hry se rovnají. Pokud dvě hry jsou přesně stejné (tj. možné tahy obou hráčů jsou tytéž), budeme říkat, že mají stejnou formu a psát $G \equiv H$. Nás bude ale více zajímat situace, kdy dvě hry mají „stejnou hodnotu“, což (s ohledem na dále uvedenou větu) znamená, že v libovolném součtu můžeme G nahradit H a výsledek hry se nezmění. Věty dále uvedené je lehké dokázat pomocí předvedení vhodné vítězné strategie.

Definice. Pokud $G - H > 0$, řekneme, že $G > H$. Analogicky $G < H$ znamená $G - H < 0$, $G = H$ znamená $G - H = 0$, $G \parallel H$ znamená $G - H \parallel 0$. Značky budeme často kombinovat a budeme psát $G \leq H$, $G \triangleleft H$ atd.

Věta. Jsou-li $G, H \geq 0$, pak je $G + H \geq 0$.

Věta. Pro každou hru G platí $G - G = 0$ a $G + 0 = G$ (přitom 0 je hra $\{\}$). Dále je-li $H = K$, je $G + H = G + K$.

Zatím by si čtenář mohl říci: „No a?“ Zdá se totiž, že celá naše teorie je pouze nějaký způsob zápisu her. Ukazuje se však, že mnohé hry jsou čísla. Přesněji každé reálné číslo je nějaká hra, většinou se ale budeme setkávat jen s čísly racionálními. Čísla umíme snadno sčítat i porovnávat, takže ty hry, které jsou čísla, budou lehce zvládnutelné. Navíc i obecnou hru je možno částečně popsat pomocí několika čísel.

O číslech

Při budování teorie bychom mohli postupovat i úplně jinak. Slovem hra bychom rozuměli něco jako pseudočíslo. Řekli bychom, že pro každou dvojici množin her L , R je $\{L \mid R\}$ také hra a že všechny hry takto vznikají. Pak bychom definovali, že

$$x \leq y \Leftrightarrow x^L \not\geq y, \quad x \not\geq y^R \quad (\text{pro žádné } x^L, y^R),$$

dále že $x = y$ znamená $x \leq y$ a $x \geq y$, že $x < y$ je zkratka za $x \leq y$ a $x \not\geq y$ a konečně $x \parallel y$ pokud $x \not\leq y$ a $x \not\geq y$ (x a y jsou neporovnatelné). Součet a rozdíl bychom definovali jako minule, ale bez motivace dané hrami. Rozmyslete si, že tyto definice nám dávají skutečně totéž (avšak vzhledem k tomu, že nemluvíme o žádných hrách a strategiích, je třeba důkazy dělat jinak, obvykle snadnou indukcí). Konečně řekneme, že hra x je číslo, když pro žádné její prvky x^L , x^R neplatí $x^L \geq x^R$.

Věta. (o nerovnostech) *Pro každé hry x, y, z platí*

- (a) $x^L \triangleleft x \triangleleft x^R$.
- (b) $x \leq x, x = x$.
- (c) $x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Věta. (vlastnosti čísel) *Pro každá čísla x, y platí*

- (a) $x^L < x < x^R$.
- (b) $x \leq y$ nebo $x \geq y$.

Věta. *Buď $x = \{x^L \mid x^R\}$. Buď dále z číslo takové, že*

- (a) *pro všechna x^L, x^R platí $x^L \triangleleft z \triangleleft x^R$.*
 - (b) *vlastnost (a) neplatí pro žádné z^L, z^R místo z .*
- Pak je $x = z$.*

Důsledek. (o mladých číslech) *Je-li $x = \{x^L \mid x^R\}$ číslo, pak je to nejmladší číslo ležící mezi x^L a x^R .*

Věta. (o dyadických číslech) *Buď $x = l/2^n$, kde l je liché číslo, $n \geq 0$. Pak $x = \{x - 1/2^n \mid x + 1/2^n\}$. Uvědomte si, že $x \pm 1/2^n$ je mladší než x , tedy je to už vytvořené číslo.*

Tato věta na příklad říká, že $1/2 = \{0 \mid 1\}$. Zkuste si sami rozmyslet, proč je oprávněné tomuto číslu říkat $1/2$.

Už dvakrát jsme použili pojem mladé číslo. Můžeme si totiž představit, že naše čísla (i hry) vznikají v generacích: v nulté generaci vznikne číslo $\{\} = 0$, v první čísla $\{0 \mid\} = 1$ a $\{\mid 0\} = -1$ atd. V konečných generacích vzniknou postupně všechna dyadická racionální čísla, v první nekonečné generaci vzniknou najednou všechna zbylá reálná čísla a mnohá další.

Poznámka. Pro znalého čtenáře poznamenejme, že náš postup bychom mohli použít pro konstrukci reálných čísel jednodušší než je klasická konstrukce (pomocí tzv. Dedekindových řezů). Stejně jako jsme zavedli součet čísel, mohli jsme definovat i jejich součin a podíl, přičemž tyto operace by splňovaly všechny rozumné požadavky, dostali bychom tzv. těleso, čili bychom mj. dostali reálná čísla se vším všudy.

Zjednodušování her

Některé hry s komplikovanou formou můžeme zjednodušit tak, že se zachová jejich hodnota. Lehké to máme, když nějaké dva možné tahy Levého jsou porovnatelné, $G^{L_1} \leq G^{L_2}$. V takovém případě je pro Levého pochopitelně lepší tah G^{L_2} , budeme říkat, že tah G^{L_1} je *převýšený* tahem G^{L_2} . Analogicky G^{R_1} je *převýšený* tahem G^{R_2} , kdykoli $G^{R_1} \geq G^{R_2}$.

O něco komplikovanější jsou *vratné* tahy. Mějme tah Levého G^{L_1} takový, že v něm existuje nějaký tah Pravého $G^{L_1 R_1}$, pro který je $G^{L_1 R_1} \leq G$. Pak řekneme, že G^{L_1} je vratný přes $G^{L_1 R_1}$ (pro tah G^{R_1} je definice symetrická). V takovéto situaci, pokud Levý použije svůj tah do G^{L_1} , Pravý může okamžitě kontrovat tahem $G^{L_1 R_1}$, protože si tím oproti výchozí pozici nepohorší. Můžeme tedy v G nahradit tah G^{L_1} všemi tahy $G^{L_1 R_1 L}$ (tj. všemi tahy Levého v daném $G^{L_1 R_1}$). Shrňme si to ve větu:

Věta. (o zjednodušování) *Hodnota hry se nezmění*

(a) *přidáním nějakého $A \triangleleft G$ mezi tahy Levého, či nějakého $B \triangleright G$ mezi tahy Pravého.*

(b) *vynecháním převýšených tahů.*

(c) *nahrazením tahu G^{L_1} tahy $G^{L_1 R_1 L}$ kdykoli je G^{L_1} vratný přes $G^{L_1 R_1}$.*

(d) *analogicky pro tahy Pravého.*

Věta. (o nejjednodušším tvaru) *Budte G, H hry, které nemají převýšené ani vratné tahy (tj. nejdou zjednodušit podle předchozí věty). Pak $G = H$ právě tehdy, když se každý tah G^L rovná nějakému H^L , každý H^L nějakému G^L a analogicky pro G^R, H^R .*

Zkuste si třeba rozmyslet, že $\{\uparrow|\uparrow\} = \{0|\uparrow\}$, kde $\uparrow = \{0|*\}$ a $* = \{0|0\}$. Kdybychom měli více času, mohli bychom dále počítat střední hodnotu hry pomocí jejího zmražení, zjišťovat jaké nerovnosti platí mezi danou hrou a všemi čísly atd. Zkuste si o tom popřemýšlet sami.

Nestranné hry

Speciální třídu her tvoří tzv. nestranné hry. Jsou to hry, ve kterých mají (v libovolné pozici) oba hráči povolené stejné tahy. Příkladem nestranných her je Nim, Hra se zlaťákem, Hra bez zlaťáku, Výhonky, Pěšcová hra. Ukazuje se, že nestranné hry jsou výrazně jednodušší, popíšeme si zde obecnou teorii (objevili ji nezávisle pánové Grundy a Sprague ve třicátých letech tohoto století, zatímco obecnou teorii vytvořil pan Conway až v letech sedmdesátých). Vzhledem k tomu, že všechny dále zkoumané hry budou mít tvar $\{L \mid L\}$, můžeme takovou hru pro zkrácení zapisovat jen $\{L\}$.

Označme $*n$ pozici v Nimu, kde je jen jedna hromádka s n sirkami. Vzhledem k pravidlům Nimu to vede na následující definici

$$*n = \{ *0, *1, \dots, *(n-1) \}.$$

Všimněte si, že $*0 = 0$, $*1 = *$, $*n \parallel 0$ pro $n > 0$. Pokud hrajeme jinou hru, než (jednohromádkový) Nim, rádi bychom zjistili, čemu se rovná $\{ *a, *b, *c, \dots \}$. Snadno se ověří, že takové číslo je rovno $*n$, kde n je nejmenší přirozené číslo, které není mezi čísly a, b, c, \dots

Zbývá nám už jenom naučit se sčítat a tedy vyřešit např. vícehromádkový Nim. Definici $*m + *n$ už známe z předchozích kapitol, dá se snadno ukázat, že tento součet je roven $*k$, kde k získáme tak, že m i n rozepíšeme do mocnin dvojky, dvakrát se opakující mocniny smažeme a zbylé normálně sečteme. Např. $*6 + *5 = *3$, neboť $6 \oplus 5 = 4 + 2 \oplus 4 + 1 = 2 \oplus 1 = 3$. Programátoři jistě poznali bitový xor.

Následující překvapivá věta nám vlastně říká, že každou nestrannou hru G můžeme ohodnotit přirozeným číslem, to bude pak jednoznačně popisovat chování této hry. To nám umožňuje lehkou analýzu nestranných her: postupně probíráme všechny pozice od nejjednodušší (až kam nás to baví), přiřazujeme čísla a využíváme přitom pravidlo pro sčítání a pravidlo nejmenšího chybějícího.

Věta. *Každá nestranná hra je rovna $*n$ pro nějaké n . Přitom pro hry s konečným počtem pozic je n obyčejné přirozené číslo, pro obecné hry může n být ordinál (jakési nekonečné přirozené číslo).*

Přehled důležitých her

$$0 = \{\}$$

$$1 = \{0 \mid\}$$

$$2 = \{1 \mid\} = \{0, 1 \mid\} = 1 + 1$$

$$-1 = \{\mid 0\}$$

$$1/2 = \{0 \mid 1\}$$

$$3/4 = \{1/2 \mid 1\}$$

$$* = \{0 \mid 0\}$$

$$*2 = \{0, * \mid 0, *\}$$

$$*n = \{0, *1, \dots, *(n-1) \mid 0, *1, \dots, *(n-1)\}$$

$$\uparrow = \{0 \mid *\}$$

$$\uparrow * = \{0, * \mid 0\} = \uparrow + *$$

$$\uparrow\uparrow = \{0 \mid \uparrow *\} = \uparrow + \uparrow$$

$$\uparrow * = \{0 \mid \uparrow\} = \uparrow + \uparrow + *$$

$$\downarrow = \{*\mid 0\} = -\uparrow$$

Literatura.

- J.H. Conway, *On Numbers and Games*, 1976
- E.Berlekamp, J.H. Conway, R. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, 1977
- <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/cgt/>
- D.E.Knuth, článek *Nadreálná čísla*, Pokroky 1977/2-5