Hmotné body

Tomáš „Šavlík“ Pavlík

Abstrakt. Přednáška pojednává o specifické metodě v geometrii, která je odvozená z jednoduchých fyzikálních vlastností.

Definice. *Hmotným bodem* rozumíme dvojici (A, m), kde A je bod a $m \in \mathbb{R}$ je jeho hmotnost.

Základní axiomy

(i) Existence těžiště: Každá hmotná soustava má právě jedno těžiště.
(ii) Zákon páky: Těžiště T bodů A, B s hmotnostmi a, b leží na přímce AB a platí $|AT| \cdot a = |TB| \cdot b$.
(iii) Redukční princip: Těžiště soustavy se nezmění, pokud zaměníme libovolnou podsoustavu s jedním hmotným bodem splývajícím s těžištěm této podsoustavy a majícím stejnou celkovou hmotnost.

Příklad 1. Dokažte, že se těžnice protínají v jednom bodě. Dokzažte, že se protínají v poměru $1 : 2$.

Příklad 2. Najděte váhy vrcholů trojúhelníka tak, aby jeho těžištěm bylo
(i) ortocentrum,
(ii) střed kružnice vepsané,
(iii) střed kružnice opsané.

Příklad 3. Dokažte, že se v trojúhelníku spojnice vrcholů s body dotyku kružnice a) vepsané b) připsané s protilehlou stranou protínají v jednom bodě.

Příklad 4.
(i) Najděte těžiště hmotné destičky ve tvaru trojúhelníka.
(ii) Najděte těžiště hmotného drátku, který tvoří obvod trojúhelníka.

Příklad 5. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník a středy úseček AB, BC, CD, DA, AC, BD pojmenujme postupně E, F, G, H, I, J. Dokažte, že se přímky EG, FH a IJ protínají v jednom bodě.

Klíčová slova. goemetrie, planimetrie, hmotné body, barycentrická soustava souřadnic

Úmluva. Budeme používat standardní značení: ABC je trojúhelník, $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$.

Příklad 6. Bod F je střed strany AB, P je střed úsečky CF a zároveň $P \in AD$. Spočítejte $\frac{|BD|}{|DF|}$.

Příklad 7. $\frac{|AF|}{|FB|} = 2 : 1$, $\frac{|BD|}{|DC|} = 3 : 1$, $P = AD \cap CF$, spočítejte $\frac{|CP|}{|PF|}$.

Příklad 8. Bod D leží na ose vnitřního úhlu u vrcholu A, bod E je střed strany AC, $P = AD \cap BE$. Dále víme, že $|AB| = 6$, $|BC| = 7$, $|CA| = 8$, spočítejte $\frac{|AP|}{|PD|}$.

Příklad 9. Nechť se AD, BE, CF protínají v bodě P. Víme, že $\frac{|AP|}{|PD|} = 1$ a $\frac{|BP|}{|PE|} = 2$. Určete $\frac{|CP|}{|PF|}$. (Náboj 2011)

Příklad 10. Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že střední příčka rovnoběžná s AC, osa vnitřního úhlu u vrcholu C a spojnice bodů dotyku kružnice vepsané se stranami AB a AC prochází jedním bodem.

Příklad 11. (Van Aubelova věta) Mějme trojúhelník ABC a v něm ceviány AD, BE a CF, které se protínají v bodě P. Dokažte, že

$$\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|EA|}{|CE|} + \frac{|AF|}{|FB|}$$

Příklad 12. Nechť $\frac{|BD|}{|DC|} = 3 : 1$, $\frac{|CE|}{|EA|} = 2 : 1$ a P je střed úsečky ED. Určete $\frac{|CP|}{|PF|}$.

Příklad 13. Máme dáno $\frac{|AF|}{|FB|} = 3 : 2$ a $\frac{|BE|}{|EC|} = 3 : 2$. Nechť se polopřímky AC a FE protnou v bodě P. Zjistěte poměr $\frac{|FE|}{|EP|}$.

Příklad 14. Dokažte, že každá přímka, která dělí obsah i obvod trojúhelníka ve stejném poměru, prochází středem kružnice vepsané.

Příklad 15. $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, E, F jsou postupně středy stran AB, CD.

(i) Dokažte, že AC dělí usečky BD a EF ve stejném poměru.
(ii) Dokažte, že EF dělí úsečky AC a BD ve stejném poměru.

Příklad 16. Nechť $\frac{|AF|}{|FB|} = 3 : 7$, $\frac{|BD|}{|DC|} = 2 : 5$, $\frac{|CE|}{|EA|} = 3 : 4$ a $P = ED \cap CF$. Určete $\frac{|CP|}{|PF|}$.

Příklad 17. $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Na stranách AB, BC, CD, DA leží postupně body E, F, G, H tak, aby

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|CF|}{|FB|} = \frac{|CG|}{|GD|} = \frac{|AH|}{|HD|}$$

Dokažte, že $EFGH$ je rovnoběžník.

Příklad 18. Dokažte Cevovu a Menelaovu větu pomocí hmotných bodů.

Příklad 19. Mějme trojúhelník, kde $\frac{|AF|}{|FB|} = 2 : 1$, $\frac{|BD|}{|DC|} = 2 : 1$, $\frac{|CE|}{|EA|} = 2 : 1$. Spočítejte obsah trojúhelníku, tvořeného přímkami AD, BE, CF když víte, že obsah ABC je 1. (pro borce: určete obsah, když jsou poměry obecné)

Příklad 20. Nechť se AD, BE, CF protínají v bodě P. Zjistěte vztah mezi poměry $\frac{|DP|}{|AD|}$, $\frac{|EP|}{|BE|}$ a $\frac{|FP|}{|CF|}$.

Příklad 21. Je dán trojúhelník ABC, středem jeho kružnice vepsané vedeme přímku, která protne přímky AB, AC, BC postupně v M, N, O. Dokažte vztah

$$\frac{a}{|BO| \cdot |OC|} + \frac{b}{|CN| \cdot |NA|} + \frac{c}{|AM| \cdot |MB|} = \frac{(a+b+c)^2}{a \cdot b \cdot c}.$$

(BRKOS XVII 1.6)

Literatura a zdroje

[1] Jaromír Šimša, *Archimédova statika v geometrii.*
[2] Paul Yiu, *Introduction ot the Geometry of the Triangle.*
[3] Tom Rike, *Mass Point Geometry.*