Hledání extrémů

Bára Kociánová

Abstrakt. Najít minimum nebo maximum je úkolem v mnohých problémových úlohách a bohužel je také zdrojem jedné z nejčastějších úvahových chyb při důkazu. Proto si ukážeme několik příkladů, jak dokázat nalezení extrému správně. Úlohy uvedené v tomto příspěvku mají jinak jen málo společného: prostě se v nich hledá nějaký extrém.

Úloha. (Motivační) Kolik koňů je možné naskládat na klasickou šachovnici 8×8, aby se vzájemně neohrožovaly?

Řešení. (Špatné) Vezmeme osm koňů a dáme je do prvního řádku šachovnice. Pak vyškrtáme políčka, která musí zůstat prázdná, a zjistíme, že jsou to následující dva řádky. Do čtvrtého umístíme dalších osm koňů a zopakujeme postup. Vyjde nám, že na šachovnici můžeme koně umístit do tří celých řádků, a dohromady máme tedy dvacet čtyři koňů. A to je maximum, protože jsme postupovali nejlepším možným způsobem, abychom jich na šachovnici dostali co nejvíc. Víc jich už být nemůže. Tečka.

Proč je řešení špatně? Jak uvidíme, dává nesprávnou odpověď. Důležitější ale je, že tvrdí, že nějaký řešitelem vybraný způsob umisťování figurek je nejlepší možný. Není to pravda. A i kdyby náhodou byla, muselo by se to dokázat, a to pořádně.

Řešení. (Stále špatné) Umístíme koně na jednu diagonálu. Vyškrtáme políčka, která nějaký kůň ohrožuje. Všimneme si, že diagonály „ob jedna vedle“ zůstaly volné, tak na ně umístíme další koně. Podobným postupem dokážeme umístit koně na všechna políčka každé druhé diagonály, kterých je dohromady 32. To je tedy maximum. Tečka.

Proč je toto řešení špatné? Našlo sice správný výsledek, ale špatnou úvahou. Podobně jako v předchozím případě si jen tak myslí, že zrovna tohle je nejlepší taktika na umisťování koňů. Ale vůbec neříká, proč by to měla být pravda. Co kdybychom začali na vedlejší diagonále, nepostavili bychom tam těch koňů náhodou víc? Nebo co kdybychom místo po diagonálách začali umisťovat koně nějak jinak?

Jak to tedy dělat správně?

Řešení. (Správné!) Postavíme jednoho koně na šachovnici. Všimneme si, že ohrožuje jen políčka, která mají opačnou barvu než to, na němž stojí. Zamyslíme se nad tím a zjistíme, že to neplatí jen pro tohoto koně, ale platí to obecně. Tedy určitě umíme na šachovnici umístit aspoň 32 koňů, protože tolik je polí jedné barvy.

Je to ale opravdu maximum? Rozdělme si šachovnici na osm obdélníků 2×4. Kdyby na šachovnici mohlo být koňů víc, muselo by podle Dirichletova principu v některém z nich být aspoň pět koňů. Jenže každý z koňů v tomto obdélníku na jednom poli stojí a jedno ohrožuje, pět koňů (a tím spíš ne více) se tam tedy nevejde. Tím jsme dokázali, že víc než 32 jich na šachovnici být nesmí, 32 jich tam umíme postavit, máme tedy hotovo. Tečka!

Možná to působí až přehnaně, ale je to opravdu častá úvahová chyba, byť ne vždy v takto jasných případech.

Obecně se tvrzení, že je něco minimum (maximum), dokazuje jako v posledním ukázkovém řešení. Najdeme nějakého kandidáta na extrém, dokážeme, že splňuje zadanou vlastnost, a pak dokážeme, že nic menšího (většího) dané podmínky nesplňuje. A nebo klidně totéž v opačném pořadí.

Pojďme to zkusit!

Příklad 1. Mějme šachovnici $2n \times 2n$, které někdo vylomil dvě protilehlá rohová políčka. Kolik nejvíce dominových kostek 1×2 na ni můžeme naskládat?

Příklad 2. Hokejového turnaje se zúčastnila čtyři družstva a každé hrálo s každým právě jeden zápas. Počet branek vstřelených v každém utkání dělí celkový počet gólů v turnaji, přičemž v žádných dvou zápasech jich nepadl stejný počet. Kolik nejméně mohlo v turnaji padnout branek? (MO 55–C–I–1)

Příklad 3. Máme trojúhelník s čísly od jedné do šesti napsanými u jeho vrcholů a středů stran. Když pro každou stranu sečteme tři čísla na ní napsaná, největší součet bude patnáct. Když po dvou sečteme čísla napsaná uprostřed stran, nejmenší součet bude čtyři. Jaký nejvyšší mohl být součet čísel napsaných u vrcholů? (PraSe 33–4–1)

Příklad 4. Najděte kladná reálná čísla a, b, c taková, aby jejich součet byl sto a jejich součin byl co největší. (PraSe 7–5–1)

Příklad 5. Najděte přirozená čísla a, b, c taková, aby jejich součet byl sto a jejich součin byl co největší. (PraSe 7–5–1)

Příklad 6. Na čtverečkovaném papíře 5×5 hrajeme lodě, přičemž soupeř má právě jednu loď. Ta je ve tvaru tetromina L, tedy řada tří čtverečků, přičemž na nějakém konci je nalepený jeden do boku. Kolik polí musíme aspoň vyzkoušet, abychom měli jistotu, že loď zasáhneme? (MO 58–B–II–2)

Příklad 7. Mějme čtverec, v němž je v pravidelných rozestupech umístěno devět bodů tak, že tvoří tři řádky a tři sloupce. Kolik nejméně čtverců musíme přidat, aby nebylo možné spojit žádné dva body křivkou, aniž bychom překročili nějaký čtverec? (PraSe 27–5–1)

Příklad 8. Máme čísla od jedné do padesáti a chceme je uspořádat na kružnici tak, aby součet všech absolutních hodnot rozdílů sousedních čísel byl co nejmenší. Jak to máme udělat a jaké bude toto minimum? (PraSe 33–4–2)

Příklad 9. Jaký nejvyšší může být součet reálných čísel x, y, pro která platí $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$? (PraSe 21–1–2)

Příklad 10. Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný. (PraSe 21–1–4)

Příklad 11. Mějme útvar složený z šesti řad čtverečků pod sebou o počtech dva, čtyři, šest, šest, čtyři a dva čtverečky, přičemž je osově souměrný podle svislé i vodorovné osy. Kolik nejvíce čtverečků můžeme obarvit, aby v žádné šikmé řadě nebyly tři obarvené vedle sebe? (MO 49–C–II–4)

Příklad 12. Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Pro jakou polohu bodu P umístěného na obvodu trojúhelníku bude $|PA| + |PB| + |PC|$ nejmenší? (PraSe 27–5–3)

Příklad 13. Jaký nejvyšší počet podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ můžeme vybrat, aby žádné dvě z nich neměly společné více než dva prvky?

Příklad 14. Kolik nejvíce čísel můžeme vybrat z množiny $\{1, 2, \ldots, 99\}$ tak, aby součet žádných dvou z nich nebyl dělitelný jedenácti? (MO 58–C–I–5)

Příklad 15. Najděte nejmenší k přirozené takové, že každá k-prvková množina dvojciferných čísel obsahuje nějaké prvočíslo. (MO 56–B–I–3)

Příklad 16. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC. Pro libovolný bod L jeho strany AB označme K, M paty kolmic z bodu L na strany AC, BC. Pro kterou polohu bodu L je úsečka KM nejkratší? (MO 56–B–II–4)

Příklad 17. Najděte minimum a maximum výrazu $a(1-b) + b(1-c) + c(1-a)$ pro $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$.

Příklad 18. Pomocí nalezení extrémů výrazu $V(a, b, c) = a + b + c + 4(1-a)(1-b)(1-c) + 3abc$ dokažte pro $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$ nerovnost

$$1 \le V(a, b, c) \le 6.$$

(PraSe 28–7–6)

Literatura a zdroje

[1] Úlohy pocházejí z uvedených ročníků matematické olympiády a MKS.