Harmonický čtyřpoměr

TOMÁŠ „ŠAVLÍK“ PAVLÍK

ABSTRAKT. Příspěvek zkoumá speciální konfigurace čtyř bodů na přímce – konfigurace, v nichž leží body v „dobrých“ vzdálenostech od sebe. Takové konfigurace mají totiž řadu pokročilých vlastností, které lze s výhodou uplatnit při řešení obtížných geometrických úloh.

Definice. Řekneme, že body A, B, C, D ležící na jedné přímce jsou v *harmonickém poměru*, jestliže

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|}.$$

Definice. Nechť A, B, C, D jsou v harmonickém poměru a bod P leží mimo jejich přímku. Pak přímky AP, BP, CP, DP tvoří takzvaný *harmonický svazek*.

Lemma 1. *Mějme harmonický svazek z bodu P a přímku, která bodem P neprochází. Pak průniky přímky se svazkem tvoří harmonický čtyřpoměr.*

Lemma 2. *Nechť A, B, C, D leží v přímce a bod P mimo ni. Pak z libovolných dvou následujících bodů plyne třetí:*

(i) *A, B, C, D jsou v harmonickém poměru,*
(ii) $|\sphericalangle APC| = 90°$,
(iii) $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle CPD|$.

Příklad 3. Mějme trojúhelník ABC, bod I je jeho vepsiště, bod E_a jeho připsiště, D je průsečík osy úhlu u bodu A a strany a. Dokažte, že A, I, D, E_a leží v harmonickém poměru.

Příklad 4. Je dán trojúhelník ABC s ortocentrem H. Označme M střed strany BC a A_0, B_0, C_0 paty výšek. Dále označme $D = BC \cap C_0B_0$ a $F = DH \cap AM$. Dokažte $|\sphericalangle AFB| = |\sphericalangle AFC|$.

Příklad 5. Dokažte, že pro harmonickou čtveřici A, B, C, D platí:

$$\frac{2}{|AC|} = \frac{1}{|BC|} - \frac{1}{|CD|}.$$

KLÍČOVÁ SLOVA. geometrie, planimetrie, harmonický čtyřpoměr, poměry

Příklad 6. Je dán trojúhelník ABC, I je incentrum, E_b je střed kružnice připsané naproti vrcholu B, H je ortocentrum a O je střed kružnice opsané. Dokažte, že spojnice těchto čtyř bodů s vrcholem A tvoří harmonický svazek.

Příklad 7. Na kružnici k jsou dány body A, B a E. Dokažte, na ose úsečky AB tvoří průsečíky s kružnicí k a přímkami AE a BE harmonickou čtveřici.

Příklad 8. Jsou dány tři přímky, které neprocházejí jedním bodem a bod X, který leží mimo ně. Zkonstruujte přímku bodem X tak, aby průsečíky tvořily spolu s bodem X harmonickou čtveřici.

Příklad 9. Je dán rovnoběžník $ABCD$ a bod E tak, aby $AE \parallel BD$. Dokažte, že AB, AC, AD a AE tvoří harmonický svazek.

Příklad 10. V trojúhelníku ABC označme paty výšek A_0, B_0 a C_0. Bod H je ortocentrum a $K = AA_0 \cap B_0C_0$. Dokažte, že body A, K, H a A_0 tvoří harmonickou čtveřici.

Lemma 11. *Nechť ABC je trojúhelník a AD, BE, CF tři ceviány procházející jedním bodem. Označme $G = BC \cap EF$. Pak A, D, B, G leží v harmonickém čtyřpoměru.*

Příklad 12. Mějme kružnici k a bod T. Z bodu T vedeme tečny ke k, které se jí dotýkají v bodech A a B. Osa úhlu ATB protne k v bodech C a D. Dokažte, že T, C, D a střed úsečky AB tvoří harmonickou čtveřici.

Lemma 13. *Body A, B, C, D leží v přímce. Označme O střed úsečky AC. Pak A, B, C, D jsou v harmonickém poměru, právě když $|OC|^2 = |OB| \cdot |OD|$.*

Příklad 14. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Přímky AB a CD se protnou v bodě E, přímky BC, AD v bodě F. Průsečík úhlopříček označme P a patu kolmice z bodu P na EF označme O. Dokažte, že $|\sphericalangle BOC| = |\sphericalangle AOD|$.
(Chinese IMO Team Selection Test 2002)

Příklad 15. Je dán trojúhelník ABC, body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, CA, AB označme postupně D, E, F. Bod X leží uvnitř trojúhelníku ABC tak, že kružnice vepsaná trojúhelníku XBC se dotýká jeho stran v bodech D, Y a Z. Dokažte, že E, F, Y, Z leží na jedné kružnici. (IMO 1995 Shortlist)

Příklad 16. Mějme trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu A a bod D ležící na straně AC. Označme E obraz bodu A podle BD. Bod F je průsečík CE s kolmicí vedenou bodem D na stranu BC. Dokažte, že AF, DE a BC se protínají v jednom bodě. (Romanian Junior Balkan MO Selection Test 2007)

Příklad 17. Je dán trojúhelník ABC, bod D je průsečík osy úhlu při vrcholu A a strany BC. Spojnice vepsišť trojúhelníků ABD a ACD protne AB a AC v bodech M a N. Dokažte, že BN, CM a AD prochází jedním bodem.

Příklad 18. Mějme trojúhelník ABC s vepsištěm I. Body dotyku kružnice vepsané s odpovídajícími stranami označme A_1, B_1, C_1. Dále označme $D = BC \cap C_1B_1$ a $F = DI \cap AA_1$. Dokažte $|\sphericalangle AFB| = |\sphericalangle AFC|$.

Příklad 19. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod G. Označme D patu kolmice z G na BC. Najděte body $X \in AB$, $Y \in AC$ tak, aby $|\sphericalangle XDG| = |\sphericalangle YDG|$ a G ležel na XY.

Příklad 20. Kružnice k_1, k_2 se protínají v bodech A, B. Předpokládejme, že střed S_1 kružnice k_1 leží na k_2. Přímka d procházející bodem S_1 protíná kružnici k_1 v bodech M a N (M leží uvnitř k_2) a kružnici k_2 podruhé v bodě P. Dokažte, že $|\sphericalangle ABM| = |\sphericalangle MBP|$.

Literatura a zdroje

[1] *www.artofproblemsolving.com*

[2] Nathan A. Court: *An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Dover Publications, New York, 2007.

[3] Cosmin Pohoata: *Harmonic Division and its Applications*