Harmonické čtveřice

David Hruška

Abstrakt. Příspěvek seznamuje s konceptem harmonických poměrů v planimetrii. Uvádí tvrzení, díky nimž lze harmonické konfigurace nacházet v geometrických úlohách olympiádního typu a používat je k často rychlému a elegantnímu řešení. Každá kapitolka obsahuje několik úloh k procvičení dané techniky.

Úmluva. Symbolem AB budeme značit tradičně přímku procházející body A, B a někdy navíc i délku *orientované úsečky* s krajními body A a B.

Dvojpoměr a promítání na přímky

Mějme přímku AB a na ní bod X. Polohu bodu X vzhledem k A a B můžeme vyjádřit tzv. *dělicím poměrem.*

Definice. Nechť X je bod na přímce AB různý od bodů A, B. Dělicí poměr bodu X vzhledem k bodům A a B je číslo $(AB, X) = \frac{AX}{BX}$.

Cvičení. Rozmyslete si, že pro dané body A, B je poloha bodu X hodnotou (AB, X) jednoznačně určena. Kdy je $(AB, X) > 0$?

Vzájemnou polohu čtyř bodů na přímce můžeme popsat podobnou veličinou.

Definice. *Dvojpoměr* bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) ležících na jedné přímce je číslo

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}.$$

Cvičení. Dokažte, že

$$(AB, CD) = (CD, AB) = (BA, DC) = \frac{1}{(AB, DC)} = \frac{1}{(DC, AB)} = \frac{1}{(BA, CD)}.$$

Poslední cvičení nám říká, že význačné hodnoty dvojpoměru jsou 1 a -1. Z rovnosti $(AB, CD) = 1$ ovšem plyne, že $A = B$ nebo $C = D$, takže nás bude více zajímat hodnota -1.

Definice. Body A, B, C, D ležící na přímce tvoří *harmonickou čtveřici*, pokud $(AB, CD) = -1$.

Cvičení. Rozmyslete si, jak zhruba harmonické čtveřice vypadají. V jakém pořadí mohou na přímce ležet jejich body?

Tvrzení. *Jsou dány přímky p, q a bod X mimo ně. Bodem X procházejí čtyři přímky, které protínají přímku p postupně v bodech A, B, C, D a přímku q postupně v bodech A', B', C', D'. Potom platí $(AB, CD) = (A'B', C'D')$.*

My budeme toto tvrzení používat hlavně pro promítání harmonických čtveřic. Příslušné čtyři přímky tvoří v tom případě *harmonický svazek.*

Jak poznat harmonickou čtveřici?

To nám velmi usnadní následující tvrzení.

Tvrzení. *V následujících běžných konfiguracích se vyskytují harmonické čtveřice:*

(i) *Pokud M je střed AB, pak $(AB, M\infty) = -1$.*
(ii) *Ceviány AD, BE, CF se protínají v P. Označme $D' = EF \cap BC$. Pak $(BC, DD') = -1$.*
(iii) *Na průměru AB kružnice k se středem O je dán bod X. Je-li X' jeho obraz v kruhové inverzi podle k (tj. platí-li $|OX| \cdot |OX'| = |OA|^2 = |OB|^2$), pak $(AB, XX') = -1$.*

Tvrzení. („Dvě ze tří“) *Nechť A, B, C, D leží na přímce a P mimo ni. Pak z libovolných dvou následujících bodů plyne třetí:*

(i) $(AC, BD) = -1$,
(ii) $|\sphericalangle APC| = 90°$,
(iii) $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle CPD|$, *kde úhly chápeme orientovaně.*

A konečně jsou tady…

Úlohy I

Úloha 1. Mějme trojúhelník ABC, bod I je jeho vepsiště, bod I_a jeho A-připsiště, D je průsečík osy úhlu u A a strany BC. Dokažte, že $(AD, II_a) = -1$.

Úloha 2. Ceviány AD, BE, CF se protínají v P. Označme $Q = BC \cap EF$, $R = AD \cap EF$, $S = CF \cap BR$ a $T = DF \cap BR$. Ukažte, že

$$(QR, EF) = (AP, DR) = (CS, PF) = (BS, RT) = -1.$$

Úloha 3. Body D, E, F jsou zvoleny postupně na stranách BC, CA, AB trojúhelníku ABC tak, že $AD \cap BE \cap CF = K$. Přímka FD protíná přímku BE v bodě X, P je střed úsečky AK a EP protíná přímku AB v bodě Y. Dokažte $XY \parallel AD$.

Úloha 4. Na přímce p jsou dány body B, D, C v tomto pořadí. Dokažte, že všechny body A takové, že AD je osa úhlu BAC, leží na pevné kružnici (tzv. *Apolloniově kružnici*).

Úloha 5. (Blanchet Theorem) Na A-výšce AD trojúhelníka ABC je dán bod P. Označme $X = BP \cap AC$, $Y = CP \cap AB$. Dokažte $|\sphericalangle XDA| = |\sphericalangle YDA|$.

Úloha 6. Je dán trojúhelník ABC, body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, CA, AB označme postupně D, E, F. Bod X leží uvnitř trojúhelníku ABC tak, že kružnice vepsaná trojúhelníku XBC se dotýká jeho stran v bodech D, Y a Z. Dokažte, že E, F, Y, Z leží na jedné kružnici. (IMO Shorlist 1995)

Úloha 7. V trojúhelníku ABC označme D patu osy úhlu u A a I_b, I_c vepsiště trojúhelníků ABD, ACD.

(1) (Sharygin 2013) Je-li $Q = BC \cap I_bI_c$, dokažte $|\sphericalangle DAQ| = 90°$.
(2) Označíme-li průsečíky I_bI_c s AB, AC postupně M, N, dokažte, že MC a NB se protnou na AD.

Úloha 8. Je dána kružnice ω se středem O a tětivou AB ($O \notin AB$). Bod C leží na ω tak, že AC půlí úsečku OB. Označme $D = AB \cap OC$ a $F = BC \cap AO$. Dokažte, že $|AF| = |CD|$.

Harmonické čtyřúhelníky

Užitečným nástrojům není zdaleka konec. Co zkusit promítat na kružnice?

Tvrzení. *Je dán bod P ležící na kružnici k a mimo přímku p. Přímky a, b, c, d protnou p v A', B', C', D' a k v A, B, C, D. Pak platí*

$$|(A'B', C'D')| = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|}.[1]$$

Definice. Řekneme, že tětivový čtyřúhelník $ABCD$ je *harmonický*, pokud pro délky jeho stran platí $ac = bd$.

Pozorování. *S použitím předchozího tvrzení si snadno rozmyslíme, že čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný do kružnice ω je harmonický právě tehdy, když pro libovolný bod $P \in \omega$ tvoří přímky PA, PB, PC, PD harmonický svazek.*[2]

Tvrzení. (O harmonických čtyřúhelnících) *Buď D bod na oblouku BC kružnice k opsané trojúhelníku ABC, který neobsahuje bod A. Pak následující tvrzení jsou*

[1] Obecnější tvrzení bez absolutních hodnot také platí, ale potřebovali bychom k jeho formulaci komplexní čísla.

[2] Pokud například $P = A$, uvažujeme místo PA tečnu k ω v bodě A.

ekvivalentní:

(i) *Čtyřúhelník $ABDC$ je harmonický.*
(ii) *Přímka AD je A-symediána v $\triangle ABC$ (tedy čára symetrická s A-těžnicí podle osy úhlu u A).*
(iii) *Přímka AD a tečny ke k skrz B a C procházejí jedním bodem.*

Cvičení. Úhlopříčky tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v P. Dokažte, že pokud je BP symediána v ABC, pak AP je symediána v ABD.

(Rumunsko TST 2006)

Pojďme to vyzkoušet!

Úlohy II

Úloha 9. Kružnice vepsaná rovnoramennému trojúhelníku ABC ($|AB| = |AC|$) se dotýká AC v E. Přímka různá od BE vedená bodem B protíná kružnici vepsanou v bodech F, G. Přímky EF, EG protnou BC v K, L. Dokažte $|BK| = |CL|$.

(MEMO 2008)

Úloha 10. V trojúhelníku ABC platí $|AC| = 2|AB|$. Označme P průsečík tečen k jemu opsané kružnici ω vedených body A a C. Dokažte, že průsečík přímky BP a osy strany BC leží na kružnici ω. (ČR TST 2012)

Úloha 11. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Označme $F = AB \cap CD$, $E = AD \cap BC$ a $T = AC \cap BD$. Předpokládejme, že A, B, T, E leží na kružnici, která protíná přímku EF v bodě P. Označme M střed úsečky AB. Dokažte, že $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle BPT|$. (Írán TST 2004)

Úloha 12. Paty kolmic z bodu D tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ na přímky BC, CA, AB označme postupně P, Q, R. Dokažte, že $|PQ| = |QR|$ právě tehdy, když se osy úhlů $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle ADC$ protínají na úhlopříčce AC. (IMO 2003)

Úloha 13. V tětivovém pětiúhelníku $ABCDE$ platí $AC \parallel DE$ a střed M tětivy BD splňuje $|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle BMC|$. Dokažte, že BE půlí tětivu AC.

Poláry

Posledním objektem, který si ukážeme, budou *poláry*. Motivací pro jejich zkoumání je následující tvrzení.

Tvrzení. *Tečny ke kružnici k vedené bodem A se jí dotýkají v bodech T, U. Přímka p procházející bodem A protne přímku TU v B a kružnici k v X, Y. Pak $(AB, XY) = -1$.*

Definice. Buď k kružnice se středem O a $X \neq O$. Přímku, která prochází obrazem X' bodu X v kruhové inverzi podle k a je kolmá na OX, nazýváme *polárou* bodu X (vzhledem ke k). Bod X je *pól* přímky p (vzhledem ke k).

Tvrzení. *Ať P, Q jsou body a p, q jejich poláry (vzhledem k nějaké kružnici k). Pak platí, že pokud P leží na q, pak Q leží na p.*

Tvrzení. *Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsaný do kružnice k. Označme $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$ a $R = AD \cap BC$. Pak trojúhelník PQR je* selfpolar, *tedy PQ je polára bodu R, PR je polára bodu Q a QR je polára bodu P.*

Teď už to musí jít samo, ne?

Úlohy III

Úloha 14. Je dána kružnice k a přímka p, která ji neprotíná. Po přímce p se pohybuje bod P. Tečny z P ke k se jí dotýkají v T a U. Dokažte, že přímka TU prochází pevným bodem.

Úloha 15. Je dána půlkružnice γ s průměrem UV. Její body P, Q splňují $UP < UQ$. Tečny k γ v bodech P a Q se protínají v bodě R. Označme $S = UP \cap VQ$. Dokažte $RS \perp UV$.

Úloha 16. Je dán trojúhelník ABC s vepsištěm I. Body dotyku kružnice vepsané s odpovídajícími stranami označme A_1, B_1, C_1. Dále označme $D = BC \cap B_1C_1$ a $F = DI \cap AA_1$. Dokažte $|\sphericalangle AFB| = |\sphericalangle AFC|$.

Úloha 17. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se středem I se dotýká jeho stran AB, AC v F, E. Označme N průsečík EF a A-těžnice AM. Dokažte $NI \perp BC$.

Obtížnější úlohy

Úloha 18. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s ortocentrem H. Kružnice s průměrem AB protne CH v bodech X a Y, kružnice s průměrem AC protne BH v bodech Z a W. Dokažte, že (nezávisle na označení) se XZ a YW protínají na BC.

(Brazílie 2013)

Úloha 19. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran BC, CA, AB v D, E, F. Úsečka AD protne vepsanou podruhé v J a přímky BJ, CJ protnou vepsanou podruhé v K, L. Dokažte, že KC, LB a AD procházejí jedním bodem.

Úloha 20. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s patou A-výšky D a kolmištěm H. Kružnice skrz B a C protne kružnici nad průměrem AH v X a Y. Označíme-li P projekci D na XY, dokažte $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle CPD|$. (Japonsko 2013)

Úloha 21. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Přímky AB a CD se protnou v bodě E, přímky BC, AD v bodě F. Průsečík úhlopříček označme P a projekci P na EF označme O. Dokažte, že $|\sphericalangle BOC| = |\sphericalangle AOD|$. (China TST 2002)

Návody

1. Využijte tvrzení „dvě ze tří".

2. Vždy najděte správný bod, z nějž promítat.

3. Najděte harmonický svazek vycházející z Y.

4. Dokreslete čtvrtého do party k B, D, C a využijte tvrzení „dvě ze tří".

5. Zkombinujte konfiguraci „Ceva–Mene" a tvrzení „dvě ze tří".

6. Čtvrtý do party k B, D, C a mocnost.

7. (1) Kde je čtvrtý do party k I_bI_c a $X = AD \cap I_bI_c$? (2) Pokud mají dvě harmonické čtveřice společný bod, pak spojnice zbylých tří odpovídajících si dvojic procházejí jedním bodem.

8. Dokažte sporem(!), že $OB \parallel FD$.

9. Označte zbylé body dotyku, najděte harmonický čtyřúhelník a promítněte ho.

10. Dokažte, že BX, kde X je průnik osy BC a ω, je symediána v ABC.

11. Dokažte, že $PATB$ je harmonický.

12. Dokažte, že oba výroky jsou ekvivalentní s tím, že $ABCD$ je harmonický.

13. Začněte tím, že AC je symediána v ABD.

14. Kterým zajímavým bodem prochází polára bodu na přímce p?

15. Dokažte, že RS je polára bodu K.

16. Dokažte a využijte, že AA_1 je polára D.

17. Dokazujte, že N je pól rovnoběžky s BC bodem A.

18. Pokud mají dvě harmonické čtveřice společný bod, pak zbylé tři spojnice procházejí jedním bodem.

19. Ukažte, že $JKDL$ je harmonický.

20. Chordály tří kružnic procházejí jedním bodem.

21. Dokažte, že OP je společná osa jistých dvou úhlů.

Literatura a zdroje

[1] Pepa Tkadlec; *Dvoupoměr a poláry*, Sborník *i*KS, 2013
[2] *http://www.artofproblemsolving.com*