Hallova věta

Viki Němeček

Abstrakt. Hallova věta je poměrně složitě znějící tvrzení z teorie grafů. Na přednášce si ukážeme, že je vlastně docela intuitivní. Potom se podíváme na některé její aplikace.

Definice. Nechť M je konečný systém[1] konečných množin. Nechť N je sjednocení všech množin $m \in M$. Potom funkci $f\colon M \to N$ nazveme *systém různých reprezentantů* právě tehdy, když je prostá a současně $\forall m \in M : f(m) \in m$.

Definice. Buď $G = (V, E)$ graf a buď $M \subseteq E$ množina dvojic vrcholů G. Pak M nazveme *párování* v grafu G právě tehdy, když je každý vrchol G v nejvýše jedné dvojici v M.

Definice. Mějme graf $G = (V, E)$. Tento graf nazveme *bipartitní*, právě když lze všechny jeho vrcholy rozdělit do dvou disjunktních množin X, Y tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy patřícími do stejné množiny nevede hrana. Množinám X a Y budeme říkat *partity* grafu G.

Věta. (Hallova) *Nechť M je konečný systém konečných množin. Pak platí, že M má systém různých reprezentantů právě tehdy, když pro každou $F \subseteq M$ a sjednocení všech jejích prvků $\cup F$ platí $|\cup F| \geq |F|$.*

Věta. (Hallova, bipartitní formulace) *Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf s partitami X a Y. Pak má G párování obsahující všechny vrcholy partity X právě tehdy, když pro každou $M \subseteq X$ platí, že z ní vedou hrany k alespoň $|M|$ různým vrcholům Y.*

Předtím, než provedeme důkaz, formulujeme větu ještě potřetí, tentokrát jako úlohu, která bude o něco jednodušší na představu.

Mějme nějakou množinu robotů R a množinu baterek B. Každý robot je kompatibilní s nějakými baterkami, přičemž libovolná množina robotů je dohromady kompatibilní alespoň s tolika baterkami, kolik jich je. Ukažte, že je možné dát každému z nich nějakou baterku tak, aby každý robot dostal baterku, se kterou je kompatibilní a žádní dva roboti nedostali tu samou baterku.

[1] Něco jako množina, akorát se v něm můžou opakovat prvky.

Cvičení. Všimneme si, že tato úloha není úplně ekvivalentní s Hallovou větou. Hallova věta je ekvivalence a úloha po nás chce pouze jednu implikaci. Jedná se však o těžší z implikací, opačný směr si lze jednoduše rozmyslet.

Důkaz. Výrok „libovolná množina robotů je dohromady kompatibilní alespoň s tolika baterkami, kolik jich je“ nazveme párovací podmínkou a v dalším textu ho budeme zkracovat jako PP.

Provedeme důkaz indukcí podle počtu robotů.

Máme-li pouze jednoho robota, pak PP říká, že tento robot je kompatibilní s alespoň jednou baterkou, takže mu nějakou takovou můžeme dát a tím je úloha vyřešena.

Nyní nechť je tvrzení dokázáno pro všechny počty robotů menší než n a dokažme ho pro n. Rozdělíme si všechny možné situace na 2 případy.

(1) Nerovnost z PP je pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu R splněna ostře. V takovém případě můžeme vzít libovolného robota a dát mu libovolnou baterku, se kterou je kompatibilní. Pro ostatní roboty a ostatní baterky je PP určitě nadále splněna (i když už ne nutně ostře), a umíme je tedy spárovat z indukčního předpokladu.

(2) Existuje neprázdná vlastní podmnožina R (označme si jí R'), pro kterou je PP splněna neostře, tedy existuje právě $|R'|$ baterek, které jsou kompatibilní s alespoň jedním robotem v R'. Množinu baterií kompatibilních s alespoň jedním robotem v R' si označíme B'. Robotům z R' umíme podle indukčního předpokladu nějak rozdat baterky z B' (všimneme si, že $|B'| = |R'|$, bude se nám to později hodit). Abychom uměli robotům z $R \setminus R'$ rozdat baterky z $B \setminus B'$, musíme dokázat, že i pro tyto množiny robotů a baterek je splněna PP.

Pro spor připusťme, že existuje $S \subseteq R \setminus R'$ taková, že roboti z S jsou dohromady kompatibilní s méně než $|S|$ baterkami z $B \setminus B'$. Označme T množinu všech takových baterek. Nyní tvrzení, jehož spornost se snažíme dokázat, říká $|T| < |S|$. V původní situaci byli ale všichni roboti z T kompatibilní pouze s baterkami v $S \cup B'$. Roboti z R' jsou ale kompatibilní pouze s baterkami v B'. Z toho, že pro celé R a B platí PP, odvodíme, že musí platit $|S \cup B'| \geq |T \cup R'|$. Vzhledem k tomu, že množiny S a B', resp. T a R' jsou disjunktní, platí i $|S| + |B'| \geq |T| + |R'|$. A protože $|B'| = |R'|$, tak $|S| \geq |T|$. Tedy neplatí $|T| < |S|$, což je hledaný spor. Ukázali jsme, že i pro $R \setminus R'$ a $B \setminus B'$ platí PP, a protože R' je neprázdná, platí $|R \setminus R'| < |R|$ a tedy můžeme aplikovat indukční předpoklad. $\square$

Úloha. Mějme šachovnici $n \times n$ a na ní věže rozmístěné tak, že v každém sloupci i řádku jich je právě $k \leq n$. Dokažte, že bez ohledu na hodnoty n a k lze věže rozdělit do k množin tak, aby v každém sloupci i řádku byla z každé množiny právě jedna věž.

Řešení. Budeme postupovat indukcí podle k.

Pro $k = 1$ můžeme dát všechny věže do jedné množiny a tím je úloha vyřešena. Nyní mějme tvrzení dokázané pro všechna $k < m$ a ukážeme, že i pro $k = m$ platí. Mějme bipartitní graf G takový, že vrcholy z jedné partity (označme si je X) odpovídají sloupcům šachovnice a z druhé (označme si je Y) řádkům. Mezi vrcholem $x \in X$ a $y \in Y$ bude hrana právě tehdy, když na políčku (x, y) je věž. Nyní pokud bychom ukázali, že tento graf má párování obsahující celou partitu X (a protože $|X| = |Y|$ tak i celou partitu Y), mohli bychom prohlásit věže odpovídající hranám tohoto párování za jednu z hledaných množin a ostatní rozdělit do $k - 1$ množin podle indukčního předpokladu.

Ukážeme, že v G je splněna PP. Buď X' nějaká množina sloupců. V nich je dohromady $|X'| \cdot k$ věží. Libovolný řádek ale může obsahovat nejvýše k z nich, neboť v každém řádku leží dohromady právě k věží. Těchto $|X'| \cdot k$ věží tedy určitě leží v alespoň $|X'|$ různých řádcích, což jsme chtěli ukázat. □

Příklady

Příklad 1. Nechť $G(V, E)$ je bipartitní graf s partitami X a Y, ve kterém pro každou $M \subseteq X$ platí, že z ní vedou hrany k alespoň $|M - 2|$ vrcholům Y. Ukažte, že G má párování obsahující všechny vrcholy partity X kromě nejvýše dvou.

Příklad 2. Ukažte, že pro každé $k \geq 1$ má každý bipartitní graf, jehož každý vrchol má stupeň právě k, párování obsahující všechny vrcholy.

Příklad 3. Mějme bipartitní graf s partitami X a Y takový, že pro každou hranu platí, že její koncový vrchol v partitě X má stupeň větší nebo roven stupni koncového vrcholu v partitě Y. Ukažte, že graf má párování obsahující celou partitu X.

Méně přímočaré aplikace

Příklad 4. Nechť jsou $x_1, x_2, \ldots, x_n$ logické proměnné (tedy proměnné, za něž dosazujeme vždy buď „pravda“ nebo „nepravda“). Buď V výrok, který obsahuje konjunkci klauzulí, přičemž každá klauzule je disjunkcí právě tří (ne nutně různých) proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z nichž každá může být použita buď normálně, nebo v negaci. Víme, že každá z proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se ve V vyskytuje právě třikrát. Ukažte, že existuje ohodnocení proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takové, že celý výrok V je pravdivý.

Příklad 5. Mějme tabulku $n \times n$ vyplněnou nezápornými reálnými čísly. Navíc je součet čísel v každém řádku či sloupci roven jedné. Dokažte, že můžeme vybrat n políček tabulky tak, aby v každém řádku i sloupci bylo vybrané právě jedno políčko a navíc v žádném z vybraných políček nebyla napsaná nula.

Příklad 6. Mějme tabulku $n \times n$, jejíž prvních k řádků je vyplněno čísly 1 až n tak, že je každé číslo v každém z prvních k řádků právě jednou a v každém sloupci nejvýše jednou. Ukažte, že ji lze doplnit tak, aby bylo každé číslo od 1 do n v každém řádku i sloupci právě jednou.

Příklad 7. Mistrovství ve fotbalu se účastnilo $2n$ týmů. Celé mistrovství trvalo $2n-1$ dnů a každý z těchto dnů hrál každý tým právě jeden zápas. Za celé mistrovství hrál každý tým s každým jiným právě jednou. František byl na mistrovství jako divák a každý den se šel podívat na jeden zápas. Ukažte, že bez ohledu na to, jak dopadla jednotlivá utkání a které dny byly které zápasy (při zachování výše zmíněných pravidel), mohl František sledovat výhru $2n-1$ různých týmů.
(Putnam 2012 B3)

Příklad 8. Mějme rovinný graf G, který neobsahuje úplný graf na 3 vrcholech jako podgraf. Dokažte, že lze hrany tohoto grafu zorientovat tak, aby z každého vrcholu vycházely nejvýše dvě.

Příklad 9. Máme množinu $n = q^2+1$ bodů. Každému bodu u je přiřazena množina barev $L(u)$, která má $q+1$ prvků tak, že pro každé dva různé body u, v platí $|L(u) \cap L(v)| \leq 1$. Dokažte, že body lze obarvit tak, aby každý bod u dostal barvu z $L(u)$ a různé body byly obarveny různými barvami. (MKS 21–2–7)

Příklad 10. Na planetě je 2^n zemí ($n \geq 3$). Všechny tyto země mají vlajku ve tvaru tabulky $n \times 1$, jejíž políčka jsou vybarvena žlutou a modrou barvou tak, že žádné dvě země nemají stejnou vlajku. Skupinu zemí nazveme *diverzní*, pokud z ní lze vybrat n různých zemí tak, abychom při poskládání jejich vlajek pod sebe v určitém pořadí dostali čtverec $n \times n$ s (alespoň jednou) jednobarevnou diagonálou. Spočtěte, kolik nejméně zemí musí ve skupině být, aby už byla určitě diverzní. (ISL 2010 C3)

Návody

1. Zkuste přidat nějaké nové vrcholy.

5. Z řádků může být jedna partita bipartitního grafu a ze sloupců druhá. Co budou hrany?

8. Kromě Hallovy věty se bude hodit i nerovnost mluvící o počtu hran v rovinných grafech vyplývající z Eulerova vzorce.

9. Při důkazu sporem stačí ukázat, že jedna barva je v množině $L(u)$ alespoň pro $q+2$ různých vrcholů u.

10. Udělat správný dolní odhad je poměrně jednoduché. Tentokrát nebude stačit jeden graf, budeme potřebovat hned dva, ovšem na stejných vrcholech. Při důkazu sporem přes Hallovu větu je potom potřeba rozebrat zvlášť případy, kdy množiny, kvůli kterým ani jeden z grafů nesplňuje PP, mají prázdný resp. neprázdný průnik.

Literatura a zdroje

[1] *Applications of Hall's Marriage Theorem*,
https://brilliant.org/wiki/applications-of-hall-marriage-theorem
[2] Shishir Agraval: *Math 55, Summer 2014*,
https://math.berkeley.edu/ ∼ sagrawal/su14_math55/notes_hall.pdf