Grafy pod vodou

PETER „πTR“ KORCSOK

ABSTRAKT. V tejto prednáške sa budeme zaoberať tokmi: v prvej polovici to budú toky v sieťach, v druhej časti ich zobecníme na ľubovoľný graf. Naučíme sa, kedy vôbec hľadaný tok existuje a ako ho nájsť.

Keď ste ešte boli deťmi, určite ste sa radi hrávali na pieskovisku. Okrem stavania hradov a zahrabávania kamarátov sa v piesku dajú vytvárať kdejaké chodbičky, ktoré sa rôzne spájajú a krížia. Teraz sme už síce starší, ale skúsme sa trochu vrátiť v čase a poďme sa trochu pohrať s bludiskami z piesku.

Pustite vodu!

Už dávnejšie sme v garáži našli hadicu, ktorou otecko polieva záhradu, a keďže teraz nie je doma, prirodzene nás napadne vyskúšať, čo sa bude diať, keď do nášho bludiska pustíme trochu vody. Aby naša snaha nebola márna, predpokladajme, že voda potečie iba po vytvorených chodbách, teda nebude celú stavbu ničiť ani do nej vsakovať **:)**. Voľný koniec hadice teda položíme do niektorej chodbičky, na inom mieste vytvoríme otvor, aby voda mohla odtekať, a naplno otvoríme kohútik …

Definícia. *Orientovaný graf* G je dvojica (V, E), kde V je neprázdna množina *vrcholov* a $E \subseteq V \times V$ je množina *hrán*, teda usporiadaných dvojíc vrcholov.

Definícia. *Sieťou* budeme rozumieť štvoricu (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z, s \in V$ sú dva rôzne vrcholy (budeme ich označovať *zdroj* a *stok*) a $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkcia *kapacity* jednotlivých hrán.

Definícia. *Tok v sieti* je ľubovoľná funkcia $f : E \to \mathbb{R}_0^+$, ktorá vyhovuje podmienkam

(1) pre každú hranu $e \in E$ platí $f(e) \leq c(e)$,
(2) pre každý vrchol $v \in V$ okrem zdroja a stoku platí

$$\sum_{(x,v)\in E} f(x, v) - \sum_{(v,x)\in E} f(v, x) = 0.$$

Nám bude stačiť, keď sa obmedzíme len na *celočíselné* siete a toky, teda $c\colon E \to \mathbb{N}_0$ a $f\colon E \to \mathbb{N}_0$.

Definícia. Nech f je nejaký tok v sieti $S = (G, z, s, c)$ a $R \subset V$, pričom $z \in R$ a $s \notin R$. Potom dvojicu $(R, \overline{R})$ (skrátene len R) nazveme *rezom* v sieti S a veľkosť toku, ktorý ním prechádza vyjadríme ako

$$f(R) = \sum_{\substack{(x,y)\in E\\ x\in R,\, y\notin R}} f(x,y) \;-\; \sum_{\substack{(y,x)\in E\\ x\in R,\, y\notin R}} f(y,x).$$

Kapacitu rezu $c(R)$ dostaneme analogicky.

Tvrdenie. *Majme sieť (G, z, s, c) a tok f. Potom hodnota $f(R)$ je nezávislá na reze R.*

Hodnotu $f(R)$ z tvrdenia budeme nazývať *veľkosť toku* f a značiť $|f|$.

Z druhej podmienky pre tok dostávame, že pre ľubovoľný rez R platí $|f| \le c(R)$. Nasledujúca veta nám určí, kedy nastáva rovnosť.

Veta. *Pre každú sieť je veľkosť maximálneho toku rovný kapacite minimálneho rezu, teda*

$$\max_{f \text{ tok}} |f| = \min_{R \text{ rez}} c(R).$$

Dôkaz tejto vety využíva algoritmus od pánov Forda a Fulkersona, ktorý vždy vezme nejaký tok a pokúsi sa ho po nejakej (neorientovanej) ceste zlepšiť. Aby sa to podarilo, musí táto cesta spĺňať tieto podmienky:

(1) pre každú hranu e orientovanú v smere od z k s platí $f(e) < c(e)$,
(2) pre každú hranu e orientovanú v smere od s k z platí $f(e) > 0$.

Ak takáto cesta existuje, môžeme sieťou poslať o niečo väčší tok, inak sme už našli tok maximálny.

Dôsledok. *Pre každú celočíselnú sieť vieme nájsť jej maximálny tok.*

A máme zaracha ...

Kým sme si vychutnávali pohľad na bludisko plné vody, prišiel otecko a vodu nám vypol. Otvor sa nám podarilo zaplniť skôr, ako voda stihla vytiecť von, takže teraz stojí v chodbičkách. Určite by to bolo krajšie, keby aj naďalej prúdila. Ale ako to docieliť?

V tejto časti už budeme pracovať s *neorientovaným* grafom – z orientovaného ho dostaneme napríklad zabudnutím „smeru“ hrán a prípadne stotožnením hrán medzi rovnakými vrcholmi. Špeciálne vrcholy pre zdroj a stok už tiež nebudeme potrebovať a dokonca môžeme zabudnúť aj na kapacitu jednotlivých hrán.

Definícia. *Tok v grafe* $G = (V, E)$ je dvojica (D, f), kde D je orientácia[1] hrán grafu G a $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ spĺňajúca pre každý vrchol $v \in V$ podmienku

$$\sum_{(x,v)\in E_D} f(x,v) - \sum_{(v,x)\in E_D} f(v,x) = 0.$$

Rezom teraz budeme rozumieť dvojicu $(R, \overline{R})$ (skrátene len R) pre ľubovoľnú neprázdnu množinu $R \subset V$, veľkosť toku prechádzajúceho rezom zadefinujeme analogicky ako pri sieťach.

Tvrdenie. *Pre ľubovoľný tok f a ľubovoľný rez R platí $f(R) = 0$.*

Dôsledok. *Nech f je ľubovoľný tok a $e \in E$ je most. Potom $f(e) = 0$.*

Definícia.

(1) Tok f nazveme *nikdenulovým*, pokiaľ neexistuje hrana $e \in E$, že $f(e) = 0$.
(2) Celočíselný tok f nazveme *k-tokom*, ak každá hrana $e \in E$ spĺňa $|f(e)| < k$.

A na záver sa pozrime, kedy existujú práve definované toky.

Tvrdenie. *Každý graf bez mostov má nikdenulový tok.*

Tvrdenie.

(1) *Graf má 2-tok práve vtedy, keď všetky jeho vrcholy majú párny stupeň.*
(2) *Kubický graf má 3-tok práve vtedy, keď je bipartitný.*

Literatúra a zdroje

Pri písaní tohto príspevku som sa mierne inšpiroval príspevkom Víta Musila *Toky v sítích, Hallova věta.*

[1] Knižnica MKS, *http://mks.mff.cuni.cz/library*
[2] Diestel, Reinhard. *Graph Theory*. 4th el. ed. 2010. *http://diestel-graph-theory.com/index.html*
[3] Zhang, Cun-Quan. *Integer flows and cycle covers of graphs.* New York: Marcel Dekker, 1997.

[1] Za každú hranu $\{x, y\} \in E$ pridáme do E_D práve jednu z dvojíc (x, y) a (y, x).