Grafy a zobrazení

Saša Kazda

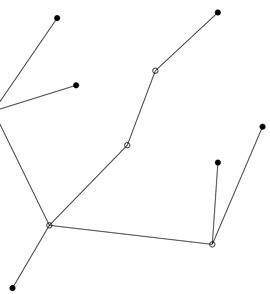
Myslíš, že na pojmu barvy a různosti barev není nic ke zobecňování? Potom je cílem této přednášky tě přesvědčit o opaku. Začneme několika definicemi z teorie grafů. Nelekej se té spousty značek, ve skutečnosti je to vše vcelku pochopitelné.

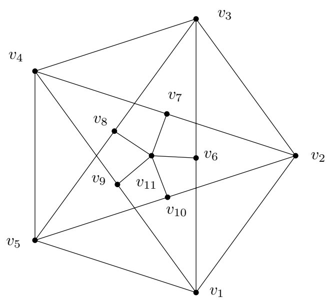
Motivační úloha. Představ si, že chceš zprovoznit síť vysílačů pro mobilní telefony. Máš k dispozici nějakých k frekvencí $f_1, f_2, \ldots, f_k$, z nichž některé dvojice (pro znalé fyziky: harmonické frekvence) by se navzájem mohly rušit, zatímco jiné dvojice je bezpečné použít naráz. Máš k dispozici mapu vysílačů a víš, které dvojice vysílačů jsou „blízko" a které „daleko". Teď bys rád přiřadil každému vysílači frekvenci tak, aby se blízké vysílače navzájem nerušily (nepoužívaly zakázané dvojice frekvencí).

Jak něco takového hezky matematicky formulovat (a pokud možno vyřešit)?

Definice. *Graf je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, taková, že, $E \subseteq \binom{V}{2}$. Budeme navíc požadovat, aby V, E byly konečné množiny, omezíme se tedy na konečné grafy.*

Příklady.





Definice. *Grafy G_1, G_2 jsou isomorfní (značeno $G_1 \cong G_2$) právě tehdy, když existuje prosté zobrazení $f : V_{G_1} \to V_{G_2}$ takové, že $f(v), f(u)$ sousedí právě tehdy, když v, u sousedí. Zobrazení f se pak nazývá isomorfismus.*

Lidsky řečeno: Dva grafy jsou isomorfní, pokud jsou „stejné", jenom jejich vrcholy se jinak jmenují.

Definice. *Obarvení grafu k barvami je zobrazení $f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že pokud $\{v, u\} \in E$, tak $f(v) \neq f(u)$.*

Teď se dostáváme k tomu, co budeme zkoumat – zobecněnému obarvení:

Definice. *Homomorfismus* ϕ *z grafu* $G = (V_G, E_G)$ *do grafu* $H = (V_H, E_H)$ *je zobrazení* $\phi : V_G \to V_H$ *takové, že pokud* $\{u, v\} \in E_G$*, tak* $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E_H$*.*

O homomorfismech lze říct ledacos zajímavého:

Věta. (Strašlivě vypadající, ale jednoduchá)
Úplné grafy[2] K_n *a prázdný graf* $\emptyset$ *jsou jediné grafy* H *splňující pro všechny grafy* G *podmínku, že pokud existuje homomorfismus* $H \to G$*, tak* G *obsahuje podgraf isomorfní* H*.*

Věta. *Pro každou dvojici neisomorfních grafů* F, G *existuje graf* H *takový, že počet homomorfismů z* F *do* H *je různý od počtu homomorfismů z* G *do* H*.*

Věta. (Totéž s opačným směrem šipek)
Pro každou dvojici neisomorfních grafů F, G *existuje graf* H *takový, že počet homomorfismů z* H *do* F *je různý od počtu homomorfismů z* H *do* G*.*

Pokud se vrátíme k úloze z úvodu, můžeme ji v řeči homomorfismů vyjádřit takto: Máme graf frekvencí F, kde je spojena každá dvojice povolených frekvencí, a graf vysílačů V, kde jsou spojeny každé dva blízké vysílače. Chceme najít homomorfismus $\phi : V \to F$. Tím jsme splnili první část motivační úlohy (hezkou formulaci). Pokud jde o řešení, to je obvykle ponecháno na počítači. Znalost vlastností homomorfismů nám ale dává moc hledat řešení efektivněji a rychleji.

Příklady.

(i) Dokaž, že graf G lze obarvit dvěma barvami právě tehdy, když neobsahuje kružnici liché délky.
(ii) Dokaž, že funkce $f(n)$, určující počet obarvení grafu G pomocí n barev, je polynom.
(iii) Najdi dva grafy se stejnou funkcí $f(n)$.
(iv) Nechť $\mathcal{G}$ je *konečná* množina grafů. Dokaž, že potom existují dva grafy F, H takové, že pro všechny grafy $G \in \mathcal{G}$ je počet homomorfismů z F do G rovný počtu homomorfismů z H do G a počet homomorfismů z G do F rovný počtu homomorfismů z H do F.

[2] Úplný graf je graf, jehož každé dva vrcholy jsou spojené hranou