Tečky, čárky, ale morseovka to není milý pane

Alča Skálová

Abstrakt. V příspěvku najdete jak základní pojmy a tvrzení z teorie grafů, tak příklady na totéž. Rovněž se seznámíte se jmény důležitých grafových algoritmů, na jejichž názornou ukázku se můžete těšit na přednášce.

Základní pojmy

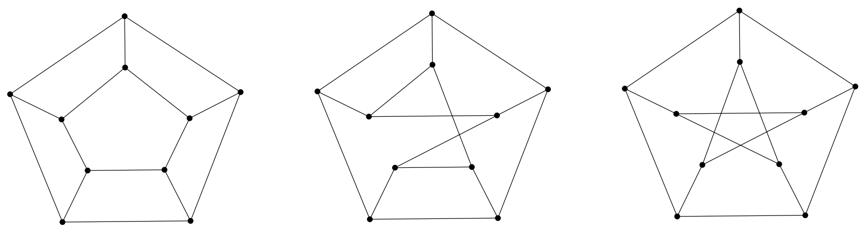
Definice. Graf G *je uspořádaná dvojice* $G = (V, E)$, *kde* V *je neprázdná množina a* E *je množina dvoubodových podmnožin množiny* V. *Jinak řečeno* V *je množina vrcholů a* E *je množina hran. Je-li* $e \in E$ *hrana grafu, pak* $e = \{u, v\}$, *kde* $u, v \in V$.

Definice. *Graf* $G' = (V', E')$ *se nazývá* podgrafem grafu G, *jestliže* $V' \subseteq V$ *a* $E' \subseteq E$.

Definice. *Dva grafy* $G = (V, E)$ *a* $G' = (V', E')$ *nazveme* isomorfní *(stejné), pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení* $f : V \to V'$ *tak, že platí* $\{u, v\} \in E$ *právě tehdy, když* $\{f(u), f(v)\} \in E'$.

Tvrzení. *Jsou-li dva grafy* G *a* H *isomorfní, pak mají isomorfní také své podgrafy. Tedy přesněji ke každému podgrafu* G' *grafu* G *existuje podgraf* H' *grafu* H, *který je isomorfní podgrafu* G' *(a naopak).*

Cvičení. Dokaž, že následující tři grafy jsou (po dvou) neisomorfní.



Klíčová slova. grafy, grafový isomorfismus, rovinné grafy, skóre grafu, grafové algoritmy

Speciální případy grafů

(i) **Úplný graf** na n vrcholech (K_n) je graf kde $E = \binom{V}{2}$, tedy graf, ve kterém jsou každé dva vrcholy spojeny hranou.
(ii) **Úplný bipartitní graf** na m a n vrcholech ($K_{m,n}$) je graf, kde $V = V_1 \cup V_2$, pro V_1, V_2 disjunktní a $E = \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.
(iii) **Cesta** na n vrcholech (P_n) je graf, ve kterém $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} : i = 1, \dots, n-1\}$, tedy graf tvořený jednou „čárou“.
(iv) **Kružnice** na n vrcholech (C_n) je graf, kde $E = \{\{v_1, v_n\}\} \cup \{\{v_i, v_{i+1}\} : i = 1, \dots, n-1\}$, tedy graf tvořící „kružnici“.

Cvičení. Dokaž, že graf je bipartitní, právě když neobsahuje žádnou kružnici liché délky.

Definice. Orientovaný graf *G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde $E \subseteq V \times V$, rozlišujeme tedy, odkud a kam hrana vede. Hranu e z vrcholu u do v zapisujeme $e = (u, v)$.*

Definice. Ohodnocený graf *je uspořádaná trojice (V, E, ω), kde V a E jsou jako v předchozích definicích a ω je funkce $\omega : E \to \mathbb{R}$, tedy funkce, která každé hraně přiřadí reálné číslo.*

Definice. *Řekneme, že graf G je* souvislý, *jestliže mezi každými dvěma jeho vrcholy existuje cesta.* Komponenta *grafu je maximální souvislý podgraf. Každý graf lze jednoznačně rozložit na komponenty.*

Definice. Sled *je posloupnost ne nutně různých vrcholů $(v_0, v_1, \dots, v_n)$, kde $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, tedy každé dva sousední vrcholy jsou propojeny hranou.* Tah *je sled, ve kterém se neopakují hrany, tj. $\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\}$ pro $i \neq j$.* Cesta *je tah, ve kterém se neopakují vrcholy, tj. $v_i \neq v_j$ pro $i \neq j$.* Uzavřený tah, uzavřený sled a uzavřená cesta *jsou tah, sled a cesta, ve kterých $v_0 = v_n$.*

Skóre grafu

Definice. Stupněm vrcholu *nazveme počet hran, které jej obsahují a značíme $deg_G(v)$. Tedy jinak napsáno $deg_G(v) = |\{e; v \in e \in E\}|$.* Skóre grafu *$G$ je posloupnost stupňů všech jeho vrcholů.*

Cvičení. Mohou mít dva neisomorfní grafy stejné skóre?

Věta. (Havlova) *Nechť $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ je posloupnost přirozených čísel. Předpokládejme, že $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n \leq n-1$. Označme symbolem D' posloupnost $(d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$, kde*

$$d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n, \\ d_i - 1 & \text{pro } i \geq n - d_n. \end{cases}$$

Potom posloupnost D je skóre grafu právě tehdy, když posloupnost D' je skóre grafu.

Věta. (Princip sudosti) *Pro každý graf G platí $\sum_{v \in V} deg_G(v) = 2|E|$.*

Cvičení. Rozhodni, mohou-li být následující posloupnosti skórem grafu, a pokud ano, tak takový graf najdi:

(i) 1 2 3 3 5
(ii) 3 3 3 3 5 6 6 6 6 6 6
(iii) 3 3 3 3 3 5 6 6 6 6 6 6 6, je-li navíc hledaný graf bipartitní
(iv) 1 1 3 3 3 3 5 6 8 9
(v) 1 2 4 4 4 5
(vi) 1 1 1 2 2 3 4 5 5

Důsledek. (Principu sudosti) *Má-li graf G alespoň jeden vrchol lichého stupně, potom musí mít aspoň dva takové vrcholy.*

Tvrzení. (Spernerovo lemma) *Existuje duhový trojúhelník.*[13]

Rovinné a eulerovské grafy

Definice. Strom *je souvislý graf neobsahující kružnici.* List *je vrchol stupně jedna.* Kostrou *grafu G rozumíme každý strom T, pro který $T(E) \subseteq G(E)$ a $V(T) = V(G)$.*

Věta. *Pro každý strom $T = (V, E)$ platí $|E| = |V| - 1$.*

Definice. Rovinný graf *je graf G, který je možné nakreslit do roviny bez křížení hran.* Stěnou *rovinného grafu G nazveme minimální část roviny ohraničenou hranami.*

Definice. Eulerovský graf *je graf, jehož všechny vrcholy a hrany je možné seřadit do uzavřeného tahu. Takový tah nazýváme* eulerovský. *Občas se eulerovský nazývá i tah, který není uzavřený (ale stále po něm chceme, aby procházel všemi hranami (rozmysli si, že při souvislosti je požadavek na procházení všech vrcholů „navíc“)).*

Věta. *Graf je eulerovský právě tehdy, když je souvislý a stupeň každého vrcholu je sudý.*

[13] Nechápeš, o co jde? Přijď na přednášku. (-:

Důsledek. *Graf je možné nakreslit jedním tahem bez opakování hran, je-li souvislý a stupeň nejvýše dvou vrcholů je liché číslo.*

Věta. *Orientovaný graf je eulerovský právě tehdy, je-li souvislý a pro každý vrchol platí, že jeho vstupní a výstupní stupeň se rovnají*[14].

Grafové algoritmy

Jsou postupy, které ti pro obecný graf (občas pro něj požadujeme třeba ještě souvislost) pomohou vyřešit nějaký úkol. Podíváš-li se na Havlovu větu, tak ta nám už přímo říká postup (tedy algoritmus), jak poznat, že nějaká posloupnost je skórem grafu. Rovněž pro nalezení eulerovského tahu byl vynalezen algoritmus.

Cvičení. (Problém minimální kostry) Pro souvislý graf $G = (V, E)$ s nezáporným ohodnocením hran ω nalezněte kostru $T = (V, E')$ grafu G s nejmenší možnou hodnotou $\omega(E')$.

Tento problém má více různých řešení. Na přednášce si předvedeme Jarníkův a takzvaný „hladový“ algoritmus. Bude-li čas a chuť, tak dojde i na borůvky[15].

Cvičení. (Dijkstrův algoritmus) Vymysli postup, který v souvislém grafu (s nezáporným ohodnocením hran) najde nejkratší cestu z vrcholu u do vrcholu v.

Směs příkladů

Příklad 1. (IMO 1964) Dokaž, že pro libovolné obarvení hran úplného grafu K_{17} třemi barvami najdeme v tomto grafu tři hrany, které jsou obarveny stejnou barvou a tvoří trojúhelník.

Příklad 2. Mějme šachovnici 3×3, na které jsou v dolních rozích dva bílí a v horních rozích dva černí koně. Urči nejmenší počet tahů, ve kterých si koně vymění pozice (tj. bílí koně budou nahoře a černí dole).

Příklad 3. PraSátka si spolu zahrála turnaj v polštářové bitce. Postupně se utkala každé z každým. Dokaž, že mezi PraSátky existují nějaká tři (říkejme jim A, B a C) taková, že A porazilo B, B porazilo C a C porazilo A, víš-li, že každé PraSátko během turnaje alespoň jednou zvítězilo.

Příklad 4. Obarvíme-li všechny hrany grafu K_6 dvěma barvami, dokaž, že pak v něm

[14] Vstupní stupeň je počet hran, které do vrcholu vchází, a výstupní počet těch, co z něj vychází.

[15] Otakar Borůvka (1899–1995).

(a) existuje jednobarevný trojúhelník,

(b) existují dokonce dva jednobarevné trojúhelníky (ne nutně stejné barvy).

Příklad 5. Mějme graf G na $2n+1$ vrcholech takový, že pro každou n-tici vrcholů existuje jiný vrchol, který je spojen se všemi vrcholy z této n-tice. Ukaž, že pak existuje vrchol, který je spojen se všemi ostatními vrcholy.

Příklad 6. Mějme rovinný graf, jehož každá stěna (včetně vnější) je trojúhelník. Každý vrchol zcela libovolně obarvíme jednou ze tří barev. Dokaž, že pak existuje sudý počet stěn, jejichž vrcholy mají všechny tři barvy různé.

Literatura

Prvně bych chtěla poděkovat jednak Jardovi Hančlovi a Michalu Rušinovi, jejichž příspěvky se staly předlohou pro tuto přednášku. Jarda zase vycházel z příspěvku Jirky Finka, tedy i jemu patří dík. Všechny příspěvky naleznete na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/library/library.php` pod názvem Grafové úlohy, Jednotažky a Teorie grafů.

[1] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum, Praha, 2003.