

Na přednášce si kromě základních definic ukážeme hlavně některé zajímavé úlohy, které se dají pěkně řešit pomocí teorie grafů. Většina příkladů se řeší trikem, takže není třeba hlubších znalostí. Také si ukážeme, jak se v grafech využívá extrémní princip.

Definice

Definice. Graf G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdná množina a E je množina dvoubodových podmnožin V . Potom V nazýváme množinou vrcholů a E množinou hran.

Definice. Graf G je bipartitní, pokud jeho vrcholy můžeme rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny A a B tak, aby $\forall \{u, v\} \in E : u \in A \ \& \ v \in B$.

Definice. Kružnice na n vrcholech je graf, jehož množinou hran je

$$E = \{\{v_i, v_{i+1}\} : i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_n, v_1\}.$$

Definice. Graf je rovinný, pokud ho lze nakreslit do roviny bez křížení hran. Stěna grafu je část plochy, která je ohraničená hranami grafu a přitom žádnou neobsahuje.

Definice. Stupeň vrcholu je počet hran, které ho obsahují.

Jednoduché příklady

Příklad 1. Dokažte, že graf je bipartitní, právě když neobsahuje žádnou kružnici liché délky.

Příklad 2. Mějme graf na n vrcholech. Každý vrchol má stupeň alespoň $1 < k < n$. Dokažte, že existuje kružnice o alespoň k vrcholech.

Příklad 3. Mějme úplný graf na devíti vrcholech. Každou hranu obarvíme jednou ze tří barev. Dokažte, že v tomto grafu existuje jednobarevný trojúhelník, když víte, že graf obsahuje právě tři bílé hrany. (IMO 1992)

Příklad 4. Je dána tabulka $n \times n$, v níž je zaplněno $2n$ políček. Dvě políčka jsou spojená zelenou hranou, pokud jsou na stejném řádku, a červenou hranou, pokud jsou ve stejném sloupci. Dokažte, že existuje kružnice, ve které se střídají barvy hran. (IMC 1999)

Příklad 5. Je dán rovinný graf takový, že všechny jeho stěny jsou ohraničené třemi hranami. Každý vrchol obarvíme jednou ze tří barev. Dokažte, že počet trojúhelníků, které mají každý vrchol jinak barevný, je sudý.

A hurá do Egypta!

Příklad 6. Dva archeologové se nudí, a tak se rozhodli zahrát si hru. Je dán rovinný graf takový, že vnější stěna je ohraničená čtyřmi hranami a všechny ostatní třemi hranami. Dva protější vrcholy jsou modré a druhé dva červené. Jeden archeolog má modrou a druhý červenou barvu. Střídavě obarvují dosud neobarvené vrcholy až jeden spojí dva své původní vrcholy svojí barvou. Hra končí remízou, pokud jsou obarvená všechna pole a nikdo zatím nevyhrál. Dokažte, že vždy má někdo vyhrávající strategii. (PraSe, 17. ročník, 3. série)

Příklad 7. Archeolog se při průzkumu pyramidy ztratí v labyrintu. Označí si křižovatku, kde právě stojí, jako s . Vymyslí následující strategii prohledávání:

- (i) Žádnou chodbou neprojde dvakrát stejným směrem.
- (ii) Pokud přijde na křižovatku, kde ještě nebyl, označí si cestu, po které přišel. Tuto cestu použije k odchodu, jen když nemá jinou možnost.
- (iii) Pokud už nemá kam jít podle pravidla (i), dožene a sní ho mumie.

Dokažte, že pokud existuje východ, průzkumník ho touto strategií najde, a v opačném případě zemře na křižovatce s . (PraSe, 22. ročník, text k seriálu)

Příklad 8. Při vykopávkách se našla tabulka $n \times n$, kde v každém poli je vyryt jeden hieroglyf. Platí, že žádné dva řádky nejsou úplně shodné. Dokažte, že můžeme odebrat jeden sloupec tak, aby se tato vlastnost zachovala.

Příklad 9. Na průzkumné výpravě o $n > 6$ lidech se každý zná s přesně třemi kolegy. Výprava dorazí na křižovatku a musí se rozdělit. Dokažte, že se zvládne rozdělit na dvě části tak, aby každý znal alespoň dva kolegy, se kterými bude pokračovat dále. (ČS střetnutí 1997)

Literatura a zdroje

Čerpal jsem hlavně z PraSečí knihovny <http://mks.mff.cuni.cz/library/>, a to konkrétně ze starších příspěvků Alči Skálové a Jardy Hančla, čímž jim děkuji.

- [1] T. Andreescu, G. Dospinescu: *Problems from the Book*, XYZ Press, 2008.