Grafové úlohy

Jarda Hančl

Tento příspěvek jsem napsal pro dvě přednášky. První bude především teoretická (znalým ale klidně mohu zadat příklady) a v druhé se už můžete těšit na mnoho úloh, zejména těch z olympiád.

Základní definice

Definice. Graf G *je uspořádaná dvojice* $G = (V, E)$, *kde* V *je neprázdná množina a* E *je množina dvoubodových podmnožin množiny* V. *Jinak řečeno* V *je množina vrcholů a* E *je množina hran. Je-li* $e \in E$ *hrana grafu, pak* $e = \{u, v\}$, *kde* $u, v \in V$.

Definice. *Graf, ve které mezi každými dvěma vrcholy může vést libovolný počet hran, nazveme* multigraf. *Graf, ve kterém hrana není pouze dvojice, ale neuspořádaná* n*-tice se nazývá* hypergraf.

Definice. *Graf* $G' = (V', E')$ *se nazývá* podgrafem grafu G, *jestliže* $V' \subset V$ *a* $E' \subset E$.

A nyní si ještě popíšeme speciální případy grafů:

(i) *Úplný graf na* n *vrcholech* (K_n) je graf kde $E = \binom{V}{2}$, tedy graf, ve kterém jsou každé dva vrcholy spojeny hranou.
(ii) *Úplný bipartitní graf na* m *a* n *vrcholech* ($K_{m,n}$) je graf kde $V = V_1 \cup V_2$, kde V_1, V_2 jsou disjunktní a $E = \{\{v_1, v_2\}\,; v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.
(iii) *Cesta na* n *vrcholech* (P_n) je graf, kde $E = \{\{v_i, v_{i+1}\}\,; i = 1, \cdots, n-1\}$, tedy graf tvořený jednou „čárou“.
(iv) *Kružnice na* n *vrcholech* (C_n) je graf kde

$$E = \{\{v_1, v_n\}\} \cup \{\{v_i, v_{i+1}\}\,; i = 1, \ldots, n-1\},$$

tedy graf tvořící „kružnici“.

Souvislé grafy

Definice. Sled *je posloupnost ne nutně různých vrcholů* $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$, *kde* $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, *tedy každé dva sousední vrcholy jsou propojeny hranou.* Tah *je sled, ve kterém se neopakují hrany, tj.* $\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\}$ *pro* $i \neq j$. Cesta *je tah, ve kterém se neopakují vrcholy, tj.* $v_i \neq v_j$ *pro* $i \neq j$. Uzavřený tah, uzavřený sled a uzavřená cesta *jsou tah, sled a cesta, ve kterých* $v_0 = v_n$.

Definice. *Řekneme, že graf G je* souvislý, *jestliže mezi každými dvěma jeho vrcholy existuje cesta.* Komponenta *grafu je maximální souvislý podgraf. Každý graf lze jednoznačně rozložit na komponenty.*

Definice. Stupněm vrcholu *nazveme počet hran, které jej obsahují a značíme* $deg_G(v)$. *Tedy jinak napsáno* $deg_G(v) = |\{e; v \in e \in E\}|$. Skóre grafu *$G$ je posloupnost stupňů všech jeho vrcholů.*

Věta. (Princip sudosti) *Pro každý graf G platí* $\sum_{v \in V} deg_G(v) = 2|E|$.

Rovinné grafy

Definice. Strom *je souvislý graf neobsahující kružnici.* List *je vrchol stupně jedna.* Kostrou *grafu G rozumíme každý strom T, pro který $T(E) \subseteq G(E)$ a $V(T) = V(G)$.*

Věta. *Pro každý strom $T = (V, E)$ platí $|E| = |V| - 1$.*

Definice. Rovinný graf *je graf G, který je možné nakreslit do roviny bez křížení hran. Potom* Stěnou *rovinného grafu G nazveme minimální část roviny ohraničenou hranami. Počet stěn grafu značíme $s(G)$.*

Věta. (Eulerova formule) *Pro každý rovinný graf G platí $|V| - |E| + s(G) = 2$.*

Důsledek 1. *Nechť graf G je rovinný a nechť $|V| \geq 3$. Pak $|E| \leq 3|V| - 6$, a tedy speciálně K_5 není rovinný.*

Důsledek 2. *Nechť graf G je rovinný, neobsahuje trojúhelník a nechť $|V| \geq 3$. Pak $|E| \leq 2|V| - 4$, a tedy speciálně $K_{3,3}$ není rovinný.*

Věta. (Kuratowski, 16 let) *Graf G je rovinný právě tehdy, když neobsahuje grafy $K_{3,3}$ nebo K_5 jako podgrafy.*

Příklady

A teď se naučíme využívat tuto teorii v praxi.

Příklad 1. (RUSSIA 2001) Je dán graf G na $2n + 1$ bodech takový, že pro každou množinu n bodů v G existuje další bod p z G, který je hranou spojen s každým bodem této množiny. Dokažte, že pak existuje bod se stupněm $n - 1$.

Příklad 2. (IMO 1964) Dokažte, že pro libovolné obarvení hran úplného grafu K_{17} třemi barvami najdeme v tomto grafu tři hrany, které jsou obarveny stejnou barvou a tvoří trojúhelník.

Příklad 3. (JAPAN 1997) Nechť G je graf na 9 vrcholech. Dále pro každou množinu pěti vrcholů v G existují alespoň dvě hrany z G, které začínají a končí v této množině. Určete minimální možný počet hran v grafu G.

Příklad 4. (VIETNAM 1998) Určete minimální k, pro které existuje graf na 25 vrcholech takový, že jednak každý vrchol je spojen hranou s právě k dalšími vrcholy a jednak pro každé dva vrcholy nespojené hranou existuje vrchol, se kterým jsou oba dva spojeny.

Příklad 5. (CZECH-SLOVAK MATCH 2) V uzavřené společnosti $N > 6$ lidí si každý člověk zatančil tučňáka(bohužel pouze ve dvou) s právě třemi dalšími členy této společnosti. Dokažte, že tato společnost může být rozdělena na dvě podspolečnosti tak, že každý člen má ve své podspolečnosti alespoň dva kamarády, se kterými někdy tančil tučňáka.

Příklad 6. (JAPAN 1998) Klub JASTIR má 2008 členů, kteří se buď znají, nebo neznají. Avšak platí, že mezi libovolnými třemi členy je dvojice, která se nezná. Kolik maximálně může v klubu JASTIR existovat známostí?

Příklad 7. (IMO 1992) Uvažujme úplný graf K_9, jehož hrany jsou buď modré, červené nebo bílé. Dokažte, že pokud jsou právě tři hrany bílé, potom existuje trojúhelník, který má všechny hrany obarvené stejně.

Příklad 8. (AUSTRALIA 1992) Tanečního večeru se účastnilo 17 lidí. Zjistilo se, že každý člověk znal na večírku právě čtyři lidi. Dokažte, že pak existuje pár lidí, kteří nejsou známí a ani nemají společného známého.

Příklad 9. (BRITISH 1987) Mezinárodní konference se účastnilo 1985 vlaštovek. Je známo, že v každé skupině tří vlaštovek byly dvě, které uměly zazpívat stejnou písničku. Za předpokladu, že každá vlaštovka umí maximálně pět písniček dokažte, že alespoň 200 vlaštovek si může sborově zazpívat jednu písničku.

Příklad 10. (E1) Ve skupině n lidí platí, že každá podskupinka čtyř lidí vždy obsahuje člověka, který zná zbylé tři(znalost je vzájemná). Dokažte, že v této skupině existuje člověk, který zná všechny ostatní.

Příklad 11. (E2) Mějme šachovnici 3×3, na které jsou v dolních rozích dva bílí a v horních rozích dva černí koně. Určete nejmenší počet tahů, ve kterých si koně vymění pozice(tj. bílí koně budou nahoře a černí dole).

Příklad 12. (E3) Dokážete do pravidelného pětiúhelníku nakreslit triangulaci takovou, že každý vrchol má sudý stupeň?

Literatura

Nejprve bych chtěl poděkovat Jirkovi Finkovi, jehož příspěvek se stal předlohou pro tuto přednášku. Naleznete ho na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/library/library.php` pod názvem Teorie grafů.

[1] Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies*, Springer, UK, 1998.