Některé grafové algoritmy

Petr Chovanec

Základní pojmy jsou v příspěvku Šárky, proto pokud nějakému slovu nebudete rozumět, podívejte se tam.

Reprezentace grafů

Abychom mohli s grafem pracovat, tak si ho musíme nějak vhodně reprezentovat. Zde jsou nejčastější reprezentace:

(1) *Matice sousednosti* slouží k uchování neohodnocených grafů, neorientovaných i orientovaných. Jejím obsahem je informace, které dvojice vrcholů jsou spojeny hranou a které ne. Je to matice velikosti $n \times n$, jejími prvky jsou hodnoty 1 nebo 0. $a_{xy} = 1$, právě když graf obsahuje hranu (x, y).

(2) *Matice vzdáleností* je obdobou matice sousednosti pro případ ohodnocených grafů. Je to opět matice tvaru $n \times n$, do které se ukládají ohodnocení jednotlivých hran, popř. příznak, že hrana neexistuje.

(3) *Matice incidence* je vhodná zvláště pro grafy s málo hranami. Matice incidence je matice tvaru $m \times n$, přičemž každý řádek matice odpovídá jedné hraně a každý sloupec jednomu vrcholu. V každém řádku je přímo vyznačena dvojice vrcholů, mezi nimiž příslušná hrana vede.

(4) *Seznam následovníků* spočívá v tom, že si ke každému vrcholu pamatujeme seznam čísel těch vrcholů, do kterých z něj vede hrana.

(5) *Seznam hran* je velmi primitivní reprezentace a skoro ve všech algoritmech se s ní velice špatně pracuje.

Nalezení nejkratší cesty

Tato klasická úloha teorie grafů se dá řešit mnoha algoritmy. Jeden z nejznámějších je tzv. *Dijkstrův algoritmus*. Tento algoritmus ve své základní podobě pracuje s grafem, který nemá záporné smyčky. Algoritmus postupně prochází dostupnými vrcholy grafu počínaje výchozím vrcholem. Způsob procházení je řízen průběžně počítanými hodnotami, které jsou přiřazovány jednotlivým vrcholům. Tyto hodnoty určují délku nejkratší cesty, jakou jsme dosud pro daný vrchol našli. Pro každý vrchol rozlišujeme, zda je jemu přiřazená hodnota dočasná (možná se ještě změní), nebo zda je již trvalá (určuje výslednou délku nejkratší cesty do tohoto vrcholu). Před zahájením průchodu grafem bude mít výchozí vrchol přiřazenu dočasnou hodnotu 0 (cesta do něj má nulovou délku) a všechny ostatní vrcholy mají dočasnou hodnotu nekonečno.

Celý výpočet pak bude probíhat po krocích tak dlouho, dokud nebude cílovému vrcholu stanovena trvalá hodnota, popř. dokud nebude přiřazena trvalá hodnota všem dostupným vrcholům. V každém kroku výpočtu se provedou tyto akce:

(1) Určíme vrchol s nejmenší dočasnou hodnotou (nechť je to vrchol s číslem x).
(2) Dočasnou hodnotu tohoto vrcholu prohlásíme za trvalou.
(3) Všem jeho následovníkům, kteří mají ještě dočasnou hodnotu, přepočítáme jejich hodnoty podle předpisu

$$h_i = \min(h_i, h_x + d_{xi}),$$

kde d_{xi} je délka hrany z vrcholu x do vrcholu i. Snížíme tedy všechny ty dočasné hodnoty vrcholů, které je možné snížit díky cestě vedoucí přes vrchol x.

Párování v bipartitních grafech

Definice. *Bipartitní graf je graf, ve kterém existuje obarvení jeho vrcholů dvěma barvami tak, že vrcholy spojené hranou mají různou barvu. To znamená, že každý vrchol je např. buď červený, nebo černý a je spojen hranou pouze s (některými) vrcholy druhé barvy.*

Příklad. (za Studentskou pečeť) Do prvních tanečních přišlo n hochů a m děvčat, ale v prvních tanečních bude každý tančit jen s někým, koho zná. Máte seznam, kdo s kým se zná a máte poradit, kdo má koho vyzvat k tanci, aby bylo na parketu co nejvíce párů. Znát se je symetrická relace, takže pokud Radek zná Šárku, tak Šárka zná Radka.

Příklad. (za milé slovo) Do posledních tanečních přišlo n hochů a n děvčat a mají se teď rozhodnout s kým budou chodit dál do bronzových tanečních. Každý už má rozmyšleno, koho chce jako prvního, koho jako druhého atd. Vymyslete (co nejlepší) algoritmus, který určí páry a zajistí, aby neexistovali hoch a dívka, kteří by si oba polepšili tím, že by šli spolu a nechali své současné partnery na ocet.