Graf(it)y v metre

PETER „πTR" KORCSOK

ABSTRAKT. V prednáške sa budeme zaoberať kreslením grafov na rôzne plochy, ako je napríklad sféra alebo torus. Predstavíme si spôsob, ako ľubovoľnú plochu reprezentovať v rovine a ako sa na ňu odvolávať. Prechádzku po týchto plochách zakončíme ich charakteristikami – eulerovský rod a orientovateľnosť – a ukážeme si metódu na vytvorenie (takmer) ľubovoľnej plochy.

Boli ste už v noci v pražskom metre? Nie? Tak to je skutočne škoda, pretože v noci tam nejazdia žiadne vlaky a na steny tunelov si môžete kresliť graf(it)y od výmyslu sveta **:)**.

Dnes sa uspokojíme s jednoduchšími graf(it)mi – budeme si kresliť body a tie sa budeme snažiť spájať rôznymi krivkami, ktoré sa ale navzájom nebudú pretínať. Viem, keby toto čítal nejaký grafiťák, hneď by protestoval, že to žiadne grafity nie sú – preto ich radšej budeme nazývať *grafmi* a spomínané body a krivky budú ich *vrcholy* a *hrany*. Nakoniec *stenou* nakresleného grafu budeme rozumieť každú súvislú časť pôvodného povrchu, ktorý nie je pokrytý naším grafom.

Prečo ale chodiť do metra? To nám nestačí kresliť grafy pri mesiačiku na Karlov most alebo Pražský hrad? Pretože metro nám umožňuje nakresliť (samozrejme bez kríženia) aj grafy, ktoré napr. na stenu hradu nenakreslíme.

Problém 1. (motivačný) Nakreslite graf s vrcholmi A, B, C, a, b, c a hranami spájajúcimi každý „veľký" vrchol s každým „malým" na

(a) povrch Karlovho mostu,
(b) steny vestibulu metra.[1]

Bežte, policajti na obzore ...

Aby nás nedajbože nechytili policajti a nedali do basy (to by sme prišli o zvyšok sústredenia, a to predsa nechceme **:)**), opustíme Prahu a metro pod jej povrchom si budeme len predstavovať. Ako ale najlepšie vyjadriť, kam naše grafy vlastne kreslíme?

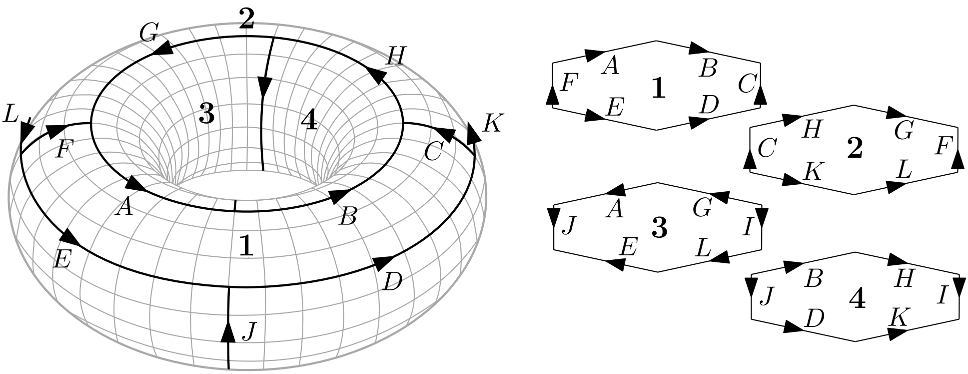
[1] Uvažujte ten najjednoduchší vestibul – uzavretá miestnosť, ktorá má v strede jeden stĺp; kresliť môžete na podlahu, strop aj povrch stĺpu.

Definícia. *Plochou* budeme rozumieť akýkoľvek objekt, na ktorý vieme kresliť graf, teda okolie každého bodu sa chová ako rovina. Plochy A a B budeme považovať za *rovnaké* (odborne *homeomorfné*), ak existuje spojitá bijekcia $f\colon A \to B$, ktorej inverzná funkcia f^{-1} je tiež spojitá.

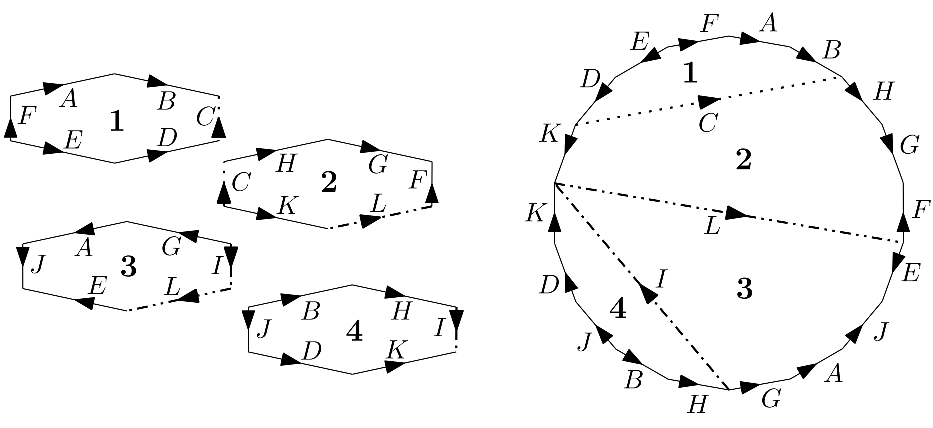
Funkcia f z definície potom zobrazuje jednoduchú krivku na jednoduchú krivku, teda ak sa nám podarí nakresliť nejaký graf na plochu A bez kríženia hrán, tak sa nebudú krížiť ani po zobrazení pomocou f na plochu B.

Takými funkciami f sú najčastejšie rôzne posunutia, otáčania, prípadne zmeny veľkosti a ich kombinácie. Dá sa ukázať, že kruh a štvorec sú vlastne rovnaké plochy, podobne sféra (povrch gule) bez jedného bodu a bežná rovina sú v skutočnosti rovnaké. Mierne horšie sa to ukazuje na zložitejších plochách, napr. torus, preto sa snažíme nájsť nejakú reprezentáciu ľubovoľnej plochy v rovine.

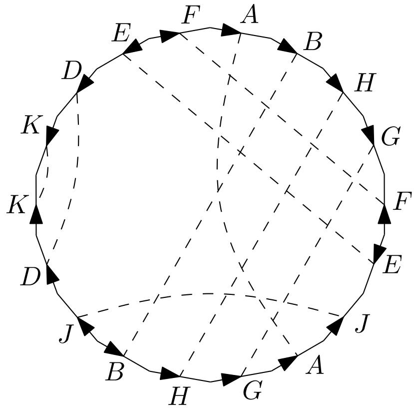
K tomu sa zvykne celá plocha rozdeliť na niekoľko rovinných útvarov. Príklad takéhoto rozdelenia pre torus nájdete na nasledujúcom obrázku. Šípky naznačujú spôsob, ako jednotlivé útvary navzájom susedia.



Následne sa tieto útvary znovu pozliepajú tak, aby vytvorili jeden mnohouholník. Opäť sa zlepujú odpovedajúce si hrany, pričom sa dohliada na ich orientáciu.



Definícia. (Mnohouholníková reprezentácia plochy) Každú plochu je možné reprezentovať pomocou mnohouholníka s orientovanými a spárovanými hranami.



Poradie a orientáciu hrán môžeme zapísať za sebou do riadku, pričom X predstavuje hranu v smere hodinových ručičiek a X^{-1} opačný smer. Reprezentáciu na obrázku by sme teda zapísali

$$ABHGF^{-1}EJ^{-1}A^{-1}G^{-1}H^{-1}B^{-1}JDKK^{-1}D^{-1}E^{-1}F.$$

Už sme si trochu popísali, ako jednotlivé plochy zapisovať, ale stále nevieme, ktoré zápisy vyjadrujú rovnaké plochy.

Problém 2. Ako vyzerajú plochy reprezentované

a) „dvojuholníkmi“ AA^{-1} a AA,
b) štvoruholníkmi $AA^{-1}**$, $ABAB$, $ABA^{-1}B^{-1}$, $ABA^{-1}B$ a $AABB$?

Ja to stále nechápem! Ako teda porovnám dve rôzne metrá?

Pomerne jednoducho – pre každú plochu existuje graf a jeho nakreslenie na tejto ploche, že každá jeho stena je homeomorfná kruhu. Takéto nakreslenie nazveme *bunkovým*.

Veta. *Pre každú plochu S existuje celé číslo $\chi(S)$, že pre ľubovoľný graf G, ktorý má nejaké bunkové nakreslenie na S, platí*[2]

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = \chi(S).$$

[2]Množinu všetkých stien tohto nakreslenia budeme značiť $F(G)$.

Poznámka. Hodnotu $\chi(S)$ nazývame *Eulerovou charakteristikou* plochy S. Pretože ale vo väčšine prípadov je táto hodnota záporná, často sa nahrádza *eulerovským rodom* plochy $\varepsilon(S) := 2 - \chi(S)$, ktorý je už nezáporný.

Problém 3. Pre každú plochu z problému 2 nájdite jej eulerovský rod.

Vidíme, že eulerovský rod nám plochy rozdelil do niekoľkých skupín. Existuje ale ešte nejaká ďalšia vlastnosť plochy, ktorá by nám pomohla rozlíšiť rôzne plochy?

Problém 4. Pokúste sa nájsť vlastnosť uzavretých jednoduchých kriviek, ktorá platí na ploche $ABA^{-1}B^{-1}$, ale na ploche $ABA^{-1}B$ neplatí.

Ak ste boli pri riešení predchádzajúceho problému úspešní, podarilo sa vám zadefinovať *orientovateľnosť* plochy. Ak použijeme mnohouholníkovou reprezentáciu, tak si vystačíme s nasledujúcou definíciou.

Definícia. Plocha je *orientovateľná*, ak jej mnohouholníková reprezentácia neobsahuje dvojicu odpovedajúcich si hrán, ktoré sú obe orientované rovnakým smerom. Špeciálne sa teda každá hrana X mnohouholníka vyskytuje v zápise plochy ako X aj ako X^{-1}.

Pomaly už nadišiel čas, aby sme odhalili tajomstvo, ku ktorému sme celý čas smerovali.

Veta.

(1) *Pokiaľ sa dve plochy zhodujú v eulerovskom rode aj orientovateľnosti, potom sú už rovnaké.*
(2) *Každá orientovateľná plocha má nezáporný párny eulerovský rod.*
(3) *Každá neorientovateľná plocha má kladný eulerovský rod.*

A na úplný záver si ešte predstavíme metódu, ako sa dá vytvoriť plocha s požadovanou orientovateľnosťou a eulerovským rodom.

Definícia.

(1) *Pridaním ucha* (v angličtine *handle*) k niektorej ploche S budeme rozumieť odstránenie dvoch disjunktných kruhov z povrchu S a prepojenie vzniknutých otvorov pomocou „tunelu“.
(2) *Pridaním krížitka* (v angličtine *crosscap*) do niektorej plochy S rozumieme nahradenie kruhu z povrchu S plochou typu AA.

Lema.

(1) *Pridanie ucha nezmení orientovateľnosť plochy a zvýši jej eulerovský rod o 2.*
(2) *Pridaním krížitka vznikne neorientovateľná plocha s eulerovským rodom o 1 väčším.*

Literatúra a zdroje

[1] zápisky z prednášky *Kombinatorika a grafy II* na MFF
[2] Diestel, Reinhard. *Graph Theory*. 4th el. ed. 2010.
http://diestel-graph-theory.com/index.html