Goniometrie

Michael „Majkl“ Bílý

Abstrakt. Příspěvek si klade za cíl ukázat jak základní, tak i složitější vlastnosti goniometrických funkcí nutné k jejich úplnému porozumění. Představíme některá různá zavedení goniometrických funkcí a některé známé věty, které buď s goniometrií souvisí, nebo ji využívají ke svému důkazu.

Goniometrické funkce jste všichni už jistě poznali na středních školách při základním kurzu pravoúhlého trojúhelníka. Toto zavedení je praktické a dají se z něj ihned usuzovat některé jejich vlastnosti. Nelze tak ale spočítat hodnotu funkce v záporných hodnotách, nebo pokud je úhel větší než 90°. Někteří se pak už dostali i k zavedení jednotkové kružnice a k oné záhadné definici goniometrických funkcí přes ni. Na vysoké škole se pak už jen několik lidí dostává k definicím, kterým nejde vůbec rozumět, ale nakonec z nich opravdu vypadne vše potřebné.

Goniometrická funkce přiřazuje jistému úhlu číslo. Naskýtá se tedy otázka, co je to úhel.

První definice, à la pravoúhlý trojúhelník

Definice. (Úhel) Mějme body A, $B \neq A$ a $C \neq A$. Úhel $\sphericalangle BAC$ je číslo rovné délce oblouku na jednotkové kružnici se středem v bodě A, kterou vytne polopřímka AB při otočení na polopřímku AC proti směru hodinových ručiček.

Pokud si kružnici rozdělíme na 360 dílků, pak můžeme místo délky oblouků zaznamenávat počet dílků, které musí polopřímka AB urazit.

Jednotkám, které vyjdou při prvním způsobu, se říká *radiány*, v druhém pak *stupně*. Celá jednotková kružnice měří 2π, a proto budou všechny úhly měřit méně než 2π radiánů a 360 stupňů. Jak ale víme, chceme definovat naše funkce i pro jiné úhly. Proto se některé úhly ztotožňují – platí $\alpha + k \cdot 2\pi \approx \alpha$, kde $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$ a $k \in \mathbb{Z}$. Obdobně pro stupně.

Všimněte si, že teď už může úhel nabývat libovolných reálných hodnot, přičemž číslo k vyjadřuje, kolikrát musí polopřímka AB z naší definice oběhnout navíc kolem celé kružnice (v případě záporných hodnot pak po směru hodinových ručiček).

Teď, když už víme, co je úhel, se můžeme pustit do práce.

Definice. Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C, úhel u vrcholu A označme α. Pak při standardním značení stran trojúhelníka definujeme

$$\sin\alpha := \frac{b}{c}, \qquad \cos\alpha := \frac{a}{c},$$
$$\operatorname{tg}\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha := \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a}{b}.$$

Protože úhel α je větší než 0, ale menší než pravý, definovali jsme naše goniometrické funkce pouze pro úhly z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, respektive $(0, 90°)$. To nám zatím bude stačit.

Úloha. (Na zamyšlení) Pokud ještě označíme úhel při vrcholu B jako β, co můžeme říct o $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$ a $\operatorname{cotg}\beta$?

Úloha. Dokažte

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha.$$

A co takhle něco obdobného pro tg?

Hint. Zkuste namalovat obrázek s pravoúhlými trojúhelníky, kde budou vystupovat všechny zmiňované úhly.

Úloha. Odvoďte vzorce pro dvojnásobný úhel.

Úloha. Z vhodných obrázků pravoúhlých trojúhelníků odvoďte hodnoty goniometrických funkcí $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{6}$. Jaké další hodnoty jsme schopni odvodit?

Úloha. Ukažte, že $\sin\alpha(1+\cos 2\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha$.

To je všechno moc pěkné, ale teď se chceme osvobodit od toho hrozného omezení pravým úhlem. Proto si zavedeme kartézský systém souřadnic a podíváme se na jednotkovou kružnici kolem jeho středu.

Druhá definice, à la jednotková kružnice

Definice. Mějme standardní systém souřadnic Oxy a sestrojme kružnici jednotkového poloměru se středem v O. Označme A bod $[1,0]$ a X libovolný bod $[x,y]$ na naší kružnici. Dále označme $\alpha := |\sphericalangle AOX|$. Pak definujeme:

$$\sin\alpha := y, \qquad \cos\alpha := x,$$
$$\operatorname{tg}\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{cotg} := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Díky ztotožnění, které jsme provedli na začátku, máme teď goniometrické funkce definované pro všechna reálná čísla. Jak nám ale pomůže veškeré to dokazování z první definice?

Úloha. Jak souvisí první definice s druhou? Platí všechny vztahy z první definice i pro všechny reálné úhly? Dokažte.

Hint. Stačí v kružnici hledat pravoúhlé trojúhelníky a pak vhodně využít toho, že naše kružnice se zachová při různých otočeních a osových symetriích.

Úloha. Jaký je definiční obor funkcí tg a cotg?

Úloha. Pro $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ dokažte

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha.$$

Úloha. Teď už snadno odvodíme

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha,\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha.\end{aligned}$$

Dokázali byste odtud odvodit vzorce pro součty a rozdíly goniometrických funkcí?

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\ \sin\alpha - \sin\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\end{aligned}$$

Odvoďte podobná tvrzení pro tangens a kotangens.

Trochu méně známé vzorce, ale podle mě ty nejužitečnější:

Tvrzení.

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],\\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],\\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)].\end{aligned}$$

Opět odvoďte obdobná tvrzení pro tangens a kotangens.

Úloha. Dokažte tyto vlastnosti goniometrických funkcí:

(i) Funkce sinus a kotangens jsou liché a periodické.
(ii) Funkce kosinus a tangens jsou sudé a periodické.

Jaké jsou jejich periody?

Pomocí rotací a symetrií ukažte:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \pi) &= -\sin\alpha, & \cos(\alpha \pm \pi) &= -\cos\alpha,\\
\sin(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) &= \cos\alpha, & \cos(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) &= -\sin\alpha,\\
\sin(\alpha - \tfrac{\pi}{2}) &= -\cos\alpha, & \cos(\alpha - \tfrac{\pi}{2}) &= \sin\alpha,\\
\sin(\pi - \alpha) &= \sin\alpha, & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Úloha. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^+$. Dokažte, že rovnice $\sin x + a\cos x = b$ má řešení právě tehdy, když $a^2 - b^2 + 1 \geq 0$.

Předpokládejme, že $\sin x + a\cos x = b$. Vyjádřete $|a\sin x - \cos x|$ pouze pomocí a a b.

Trocha trigonometrie

Následuje několik slíbených tvrzení bez důkazu. Budeme vždy hovořit o trojúhelníku ABC se stranami a, b, c, úhly α, β, γ a poloměrem kružnice opsané R.

Tvrzení. (Obsah trojúhelníka) *Obsah trojúhelníka je*

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Věta. (Sinová věta) *Platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Tvrzení. (O ose úhlu) *Osa úhlu u vrcholu A protne stranu a v bodě D. Platí*

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

Věta. (Cevova věta) *Nechť jsou D, E, F body na přímkách určených postupně stranami a, b, c, různé od vrcholů trojúhelníku. Pak přímky AD, BE, CF procházejí jedním bodem tehdy a jen tehdy, když platí*

$$\frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} \cdot \frac{|AF|}{|BF|} = 1.$$

Věta. (Kosinová věta) *Platí*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

a cyklické záměny.

Věta. (Stewartova věta) *Nechť D je bod na straně a. Pak*

$$a(|AD|^2 + |BD| \cdot |CD|) = c^2|CD| + b^2|BD|.$$

Tvrzení. (Brahmaguptův vzorec) *Mějme čtyřúhelník $ABCD$ se stranami a, b, c, d. Označme $s = \frac{a+b+c+d}{2}$. Pak obsah čtyřúhelníku je*

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Komplexní čísla

Definice. (Komplexní číslo a polární souřadnice) Pro každý bod roviny $A = [a, b]$ existuje právě jedno číslo $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ takové, že $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. To udává úhel, který svírá polopřímka OA s kladnou poloosou x. Každý bod je tedy jednoznačně určen takovýmto úhlem φ a vzdáleností od počátku $\sqrt{a^2+b^2}$. Těmto dvěma číslům říkáme polární souřadnice bodu A.

Nechť $i^2 = -1$. Pak $z = a + bi$ nazveme komplexním číslem. Bod $[a, b]$ má polární souřadnice $[r, \varphi]$. Pak $r = \sqrt{a^2+b^2}$ nazýváme velikost komplexního čísla z a φ jeho argument. Platí $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.

Tvrzení. *Nechť* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ *a* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$ *jsou komplexní čísla. Pak*

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1+\varphi_2)\big), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1-\varphi_2)\big). \end{aligned}$$

Věta. (Moivreova věta) *Pro každé* $n \in \mathbb{Z}$ *a* $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ *platí*

$$(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi.$$

Tvrzení. *Platí*

$$\begin{aligned} \sin n\alpha &= \binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha + \cdots, \\ \cos n\alpha &= \binom{n}{0}\cos^{n}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha + \cdots. \end{aligned}$$

Na přednášce se pokusím nastínit, proč vlastně ani poslední zavedení není nejšťastnější. Proto vám ještě poskytnu pohled pod vysokoškolskou pokličku.

Třetí definice, ta nejlepší

Věta. *Existuje právě jedna dvojice funkcí* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující:*

(i) f *je lichá,* g *je sudá,*
(ii) *pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí* $f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$ *a* $g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$,
(iii) *existuje kladné reálné číslo* π *takové, že* f *je rostoucí na intervalu* $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ *a* $f(0) = 0$,
(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Definice. Funkci f z předchozí věty nazvu *sinus* a funkci g *kosinus*. *Tangens* a *kotangens* nadefinuji stejně jako předtím.

Tvrzení. *Předcházející větu splňuje dvojice funkcí*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Následují příklady *silně* subjektivně srovnané podle obtížnosti.

Příklady aneb to, proč jsme tu

Lehké

Úloha 1. Spočtěte

(i) $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ a $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$,
(ii) $\cos^4 \frac{\pi}{24} - \sin^4 \frac{\pi}{24}$,
(iii) $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$,
(iv) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

Úloha 2. Nechť x je reálné číslo takové, že $\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x = 2$. Spočtěte $\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x$.

Úloha 3. V oboru reálných čísel řešte soustavu

$$\sin x + \cos y = \sin(x+y),$$
$$\sin y + \cos x = \cos(x+y).$$

Úloha 4. Dokažte

$$(1 - \operatorname{cotg} 23^\circ)(1 - \operatorname{cotg} 22^\circ) = 2.$$

Úloha 5. Na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ řešte rovnici

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}.$$

Úloha 6. Zjednodušte

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}.$$

Úloha 7. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$1 + \sin\frac{x+\pi}{5} \cdot \sin\frac{x-\pi}{11} = 0.$$

(MO 55-A-s-3)

Úloha 8. V oboru reálných čísel řešte soustavu nerovnic

$$\begin{aligned} \sin x + \cos y &\geq \sqrt{2}, \\ \sin y + \cos z &\geq \sqrt{2}, \\ \sin z + \cos x &\geq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(MO 50-A-I-4)

Úloha 9. Najděte taková $x, y \in \mathbb{R}$, aby rovnice

$$\sin a = x \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) + y \sin\left(\frac{\pi}{6} + a\right)$$

byla splněna pro všechna $a \in \mathbb{R}$. (MKS 29-6-6)

Úloha 10. Na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ řešte rovnici

$$\sin x + \cos y = \sin(xy).$$

Úloha 11. Určete obsah množiny dané podmínkami $x^2+y^2 \leq 100$ a $sin(x+y) \geq 0$.

Úloha 12. Pro všechna x reálná dokažte

$$3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1.$$

Úloha 13. Pro všechna přípustná x dokažte

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x.$$

Úloha 14. Dokažte

$$(4\cos^2 9^\circ - 3)(4\cos^2 27^\circ - 3) = \operatorname{tg} 9^\circ.$$

Úloha 15. Pro přípustná x dokažte

$$\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$$

Na substituci

Úloha 16. Nechť $x_0 = 2003$ a $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{1-x_n}$ pro $n \geq 1$. Spočtěte x_{2004}.

Úloha 17. Dokažte, že mezi každými pěti různými reálnými čísly lze najít dvě (a a b) taková, že $|ab+1| > |a-b|$.

Úloha 18. Vyřešte v reálných číslech soustavu

$$y = \frac{4x^2}{1+4x^2},$$
$$z = \frac{4y^2}{1+4y^2},$$
$$x = \frac{4z^2}{1+4z^2}.$$

(MKS 27-1-7)

Úloha 19. Dokažte, že mezi 101 reálnými čísly existují dvě čísla u, v, pro něž platí

$$100|u-v| \cdot |1-uv| \leq (1+u^2)(1+v^2).$$

(MO 61-A-III-3)

Úloha 20. Mějme čtyři reálná čísla větší než jedna. Dokažte, že vždy umíme vybrat dvě z nich (x a y) takové, že výraz

$$\frac{\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}+1}{xy}$$

nabývá hodnoty alespoň $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (MKS 27-8-5b)

Těžší

Úloha 21. Označme $f(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin 1000x$. Dokažte, že součet kořenů této funkce na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je 2001π. (MKS 21-3-4)

Úloha 22. Najděte všechna řešení rovnice

$$\sin^2 x + \sin 2x \sin 4x + \cdots + \sin nx \sin n^2 x = 1.$$

(MKS 4-1-4)

Úloha 23. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sin^2 x + \cos^2 y = \operatorname{tg}^2 z,$$
$$\sin^2 y + \cos^2 z = \operatorname{tg}^2 x,$$
$$\sin^2 z + \cos^2 x = \operatorname{tg}^2 y.$$

(MO 62-A-I-6)

Úloha 24. V oboru reálných čísel řešte soustavu

$$2\sin x \cos(x+y) + \sin y = 1,$$
$$2\sin y \cos(x+y) + \sin x = 1.$$

(MO 58-A-I-1)

Úloha 25. Určete vnitřní úhly v trojúhelníku α, β, γ, pokud splňují

$$2\sin\beta \sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha = 1,$$
$$2\sin\gamma \sin(\gamma+\beta) - \cos\beta = 0.$$

(MO 58-A-II-3)

Úloha 26. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{2}\,(\sin t + \cos t) = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

(MO 55-A-I-1)

Úloha 27. V oboru reálných čísel řešte soustavu

$$\sin^2 x + \cos^2 y = y^2,$$
$$\sin^2 y + \cos^2 x = x^2.$$

(MO 55-A-II-4)

Úloha 28. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$ platí nerovnost

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geq 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

(MO 51-A-II-1)

Úloha 29. Předpokládejme, že reálná čísla a, b splňují

$$\sin a + \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Spočtěte $\sin(a+b)$.

Úloha 30. Spočtěte

$$\cos a \cdot \cos 2a \cdots \cos 999a,$$

kde $a = \frac{2\pi}{1999}$.

Pár macků

Úloha 31. Spočtěte

$$(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}2^\circ)\cdots(1+\operatorname{tg}45^\circ).$$

(AMC12P 2002)

Úloha 32. Však už víte, co s tím

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{cotg}^2 2y &= 1,\\ \operatorname{tg}^2 y + 2\operatorname{cotg}^2 2z &= 1,\\ \operatorname{tg}^2 z + 2\operatorname{cotg}^2 2x &= 1.\end{aligned}$$

(MO 55-A-III-6)

Úloha 33. Najděte nejmenší hodnotu výrazu

$$\left|\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right|$$

pro $x \in \mathbb{R}$. (Putnam 2003)

Úloha 34. Předpokládejme, že reálná čísla $a, x, y, z \in \mathbb{R}$ splňují

$$\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x+y+z)} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x+y+z)} = a.$$

Dokažte, že pak platí

$$\cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(z+x) = a.$$

O goniometrických funkcích by se dala napsat ještě spousta věcí – už jen proto, že souvisí s trigonometrií, které jsem se snažil co možná nejvíce vyhnout. Trigonometrie se pak dá vztáhnout na část geometrie, a to už je opravdu velké téma. Každopádně by se slušelo říci, že jsem vynechal témata „O pohybu na kouli“ a „Skalární součin vektorů“, které si může čtenář doplnit ze skvělé knihy [1], ze které jsem čerpal.

Zdroje

[1] Titu Andreescu, Zuming Feng, *103 Trigonometry Problems*
[2] Archiv Matematického korespondenčního semináře
[3] Stránky české Matematické olympiády