Goniometrické substitúcie

Marta Kossaczká

S goniometrickými funkciami ste sa už určite stretli, pravdepodobne predovšetkým v geometrii. Ich použitie tam ale zďaleka nekončí.

Na začiatok si zhrňme, čo o nich vieme. Funkcie *sínus* a *kosínus* sa dajú definovať pomocou jednotkovej kružnice. Tá má stred v počiatku (bod $[0,0]$) a polomer 1. Uvažujme ľubovoľnú polpriamku p začínajúcu v počiatku, potom uhlu (orientujeme ho proti smeru hodinových ručičiek), ktorý zviera x-ová os s p, zodpovedá práve jeden priesečník p a jednotkovej kružnice. Hodnota y-novej súradnice tohoto bodu je sínus daného uhlu, kým x-súradnica udáva kosínus daného uhlu.

Tvrdenie. *Pre funkcie sínus a kosínus platí:*

(i) *Definičný obor oboch funkcií sú všetky reálne čísla.*
(ii) *Ich obor hodnôt je interval* $[-1,1]$.
(iii) *Obidve funkcie sú* 2π *periodické.*
(iv) *Sínus je na intervale* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *rastúci a na* $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ *klesajúci.*
(v) *Kosínus je na* $[-\pi,0]$ *rastúci a na* $[0,\pi]$ *klesajúci.*

Funkcia *tangens* je definovaná na svojom definičnom obore ako

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

a funkcia *kotangens* je definovaná na svojom definičnom obore ako

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a}.$$

Tvrdenie. *Pre funkcie tangens a kotangens platí:*

(i) *Definičný obor tangensu je* $\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$ *a kotangesu* $\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.
(ii) *Obor hodnôt oboch funkcií sú všetky reálne čísla.*
(iii) *Obidve funkcie sú* π *periodické.*
(iv) *Tangens je na intervale* $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *rastúci.*
(v) *Kotangens je na intervale* $(0,\pi)$ *klesajúci.*

Pre goniometrické funkcie platí zopár užitočných, špeciálnych vzťahov, ktoré je dobré si zapamätať.

Tvrdenie. *Pre všetky $a, b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, pre ktoré má daný výraz zmysel (tj. nedelíme nulou) platí:*

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos a, \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin a,$$
$$\sin(-a) = -\sin a, \qquad \cos(-a) = \cos a,$$
$$\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a, \qquad \operatorname{cotg}(-a) = -\operatorname{cotg} a,$$
$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1,$$
$$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \sin b \cdot \cos a,$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b,$$
$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b},$$
$$\operatorname{cotg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} b \mp 1}{\operatorname{cotg} a \pm \operatorname{cotg} b},$$
$$\sin a \pm \sin b = 2\sin\left(\frac{a \pm b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a \mp b}{2}\right),$$
$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a - b}{2}\right),$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a - b}{2}\right).$$

Príklady

V nasledujúcich príkladoch stačí iba dobre uhádnuť vhodnú substitúciu pomocou vyššie uvedených vzťahov.

Príklad 1. Majme reálne čísla a, b také, že $a^2 + b^2 = 1$. Nájdite minimum a maximum výrazu ab.

Príklad 2. Dokážte, že zo štyroch ľubovoľných čísel z intervalu $(0, 1)$ vieme vybrať dve tak, aby platilo

$$0 < x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2} < \frac{1}{2}.$$

Príklad 3. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc:

$$2x + x^2 y = y,$$
$$2y + y^2 z = z,$$
$$2z + z^2 x = x.$$

Príklad 4. Rozhodnite, či existuje 100-prvková množina čísel S s vlastnosťou: ak x patrí do S, tak aj číslo $2x^2 - 1$ patrí do S.

Príklad 5. Pre ľubovoľné číslo $a \in \mathbb{R}$ definujme postupnosť vzťahmi $x_1 = a$ a $x_{n+1} = 1/(1 - x_n) - 1/(1 + x_n)$, až kým $x_n = \pm 1$, číslo n potom označuje dĺžku tejto postupnosti. Koľko existuje postupností s dĺžkou 8?

Príklad 6. Dokážte, že rekurentne zadaná postupnosť spĺňujúca vzťah

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}}$$

je periodická

Príklad 7. Majme rekurentnú postupnosť zadanú vzťahom

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{1 - x_n}$$

a $x_0 = 2013$. Vypočítajte hodnotu x_{2014}.

Nerovnosti

Goniometrické funkcie majú veľké využitie aj medzi nerovnosťami. Pri takýchto úlohách ale dosadenie býva iba začiatkom, potom treba siahnuť po nejakých klasických zbraniach, ako AG alebo Jensenova nerovnosť, či iných známych nerovnostiach týkajúcich sa predovšetkým trojuholníka.

Nasledujúce tvrdenie vyplýva z Jensenovej nerovnosti a je často využívané po prevedení nerovnosti na goniometrický tvar.

Tvrdenie. *Majme trojuholník s vnútornými uhlami a, b, c, potom platí:*

$$\sin\frac{a}{2} + \sin\frac{b}{2} + \sin\frac{c}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Tvrdenie. *Majme ostrouhlý trojuholník s vnútornými uhlami a, b, c, potom platí:*

$$\cos a + \cos b + \cos c \leq \frac{3}{2}.$$

Poznámka. Tvrdenie platí aj pre všeobecný trojuholník.

V nerovnostiach sa občas stretávame s rôznymi podmienkami, ktoré nám sami od seba nič nehovoria. Ukážeme si, ako sa môžeme takýchto podmienok zbaviť pomocou špecifických goniometrických substitúcií.

Tvrdenie. *Nech sú čísla $a, b, c \in (0, \frac{\pi}{2})$, potom platí nasledujúca rovnosť práve vtedy, keď a, b, c sú uhly trojuholníka:*

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$$

Úloha. Majme kladné reálne čísla také, že platí $x+y+z=xyz$. Dokážte:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\leq\frac{3}{2}.$$

(Korea 1998)

Riešenie. Vieme, že tangens na intervale $(0,\frac{\pi}{2})$ dosahuje všetkých reálnych kladných čísel. Preto môžeme substituovať $x=\operatorname{tg}a$, $y=\operatorname{tg}b$, $z=\operatorname{tg}c$ pre nejaké $a,b,c\in(0,\frac{\pi}{2})$. Potom podľa podmienky platí $\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}c=\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c$, a teda z predošlého tvrdenia vieme, že a, b, c sú uhly trojuholníka.

Dosadíme do našej nerovnosti a dostávame:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2a}}+\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2b}}+\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2c}}\leq\frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2a}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2b}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2c}}}\leq\frac{3}{2}.$$

Keďže kosínus je na intervale $(0,\frac{\pi}{2})$ kladný, môžeme odmocniť a dostávame:

$$\cos a+\cos b+\cos c\leq\frac{3}{2},$$

čo je presne predošlé tvrdenie, pretože a, b, c sú uhly trojuholníka.

Príklad 8. Majme kladné reálne čísla x, y, z také, že platí $x+y+z=xyz$. Dokážte:

$$xy+yz+xz\geq3+\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}.$$

Tvrdenie. *Majme čísla $a,b,c\in(0,\pi)$, potom platí nasledujúca rovnosť práve vtedy, keď a, b, c sú uhly trojuholníka:*

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}+\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}+\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}=1.$$

Príklad 9. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc:

$$3(x^2+1)yz=4(y^2+1)xz=5(z^2+1)xy,$$

kde plati $xy+yz+xz=1$.

Tvrdenie. *Majme čísla $a,b,c\in(0,\pi)$, potom platí nasledujúca rovnosť práve vtedy, keď a, b, c sú uhly trojuholníka:*

$$\sin^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{b}{2}+\sin^2\frac{c}{2}+2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}=1.$$

Príklad 10. Majme čísla x, y, z väčšie ako 1 spĺňujúce $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Dokážte:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\leq\sqrt{x+y+z}.$$

(Iran 1997)

Ďalšie príklady

Príklad 11. Majme kladné reálne čísla x, y, z také, že platí $x + y + z = xyz$. Dokážte:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Príklad 12. Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla také, že platí:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+d^2} = 1.$$

Dokážte, že $abcd \geq 3$. (Lotyšsko 2002)

Príklad 13. Nech x, y, z sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí:

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y+\sqrt{(y+x)(y+z)}} + \frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1.$$

(Walther Janous, Crux Mathematicorum)