

Goniometrické substituce

Marek Tesař

Použitie goniometrických substitúcií

Asi každý z vás vie, čo je to substitúcia. Je to akési nahradenie určitého výrazu iným výrazom. My sa na tejto prednáške pozrieme na špeciálny typ substitúcie a to na goniometrickú substitúciu. To je taká, že substituovať budeme rôzne goniometrické funkcie ako napríklad \cos , \sin , tg , cotg a prípadne ich kombinácie. Tak si skúsme uviesť jeden krátky príkladík.

Úloha. Nech a, b sú reálne čísla také, že $a^2 + b^2 = 1$. Nájdite maximum a minimum výrazu $a \cdot b$.

No asi je každému hneď jasné, že musí platiť $-1 \leq a, b \leq 1$. Ďalšia vec, ktorá sa dá tiež rýchlo vypočítavať je, že z rovnosti $a^2 + b^2 = 1$ vyplýva, že existuje reálne číslo σ také, že $a = \sin \sigma$ a $b = \cos \sigma$. A to je naša hľadaná goniometrická substitúcia. Teraz si už len stačí uvedomiť, že $a \cdot b = \sin \sigma \cdot \cos \sigma = 1/2 \sin 2\sigma$. A každému je asi jasné, že koľko je hľadané maximum a minimum.

Skúsený riešiteľ by tento prvý príklad takmer určite neroiešil pomocou goniometrickej substitúcie, ale najskôr asi pomocou nejakej AG nerovnosti. Neskôr si však ukážeme príklady, kedy takáto substitúcia, bude najpriamejší postup k nájdeniu riešenia. Trošku to už naznačuje aj nasledujúci príklad.

Úloha. Nech a, b, c, d sú reálne čísla, ktoré splňujú $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ a $ac + bd = 0$. Zistite aké hodnoty môže nadobúdať výraz $ab + cd$.

Tak ak by sme použili podobnú substitúciu ako v predchádzajúcom prípade tak by sme mohli substituovať $a = \sin \sigma$, $b = \cos \sigma$, $c = \sin \theta$ a $d = \cos \theta$. Potom dostávame $0 = ac + bd = \sin \sigma \sin \theta + \cos \sigma \cos \theta = \cos(\sigma - \theta)$. A teda dostávame, že $\sigma - \theta = \pi/2 + k\pi$ pre vhodné celé číslo k . My ale chceme zistiť hodnotu výrazu $ab + cd = \sin \sigma \cos \sigma + \sin \theta \cos \theta = 1/2(\sin 2\sigma + \sin 2\theta)$. My však vieme, že $2\sigma = 2\theta + \pi + 2k\pi$ a teda $ab + cd = 1/2(\sin(2\theta + \pi + 2k\pi) + \sin 2\theta) = 1/2(\sin(2\theta + \pi) + \sin 2\theta)$. No a teraz už nie je ťažké ukázať, že $ab + cd = 0$.

Na záver si dajme ešte jednu netriviálnu úlohu:

Úloha. Spočítajte sumu $\sum_{n=0}^{\infty} \arctg(1/(1+n+n^2))$.

No a ako ste si už určite všimli, tak výhodou použitia goniometrických substitúcií je práve to, že pre goniometrické funkcie platia rôzne identity (ktoré obecné pre reálne čísla neplatia) a práve v tom je sila týchto substitúcií.