Goniometrické funkcie

Martin Fraas

Tento príspevok je iba stručným obsahom prednášky. Budem ukazovať využitie vlastností goniometrických funkcií a vetšinu vzorčekov ktoré odvodíme by ste našli v každom Bartchovi a možno aj v stredoškolskej učebnici, preto nepokladám za potrebné ich tu hlava-nehlava vypisovať. Prečo téma goniometrické funkcie? Je to téma, ktorá síce neprinesie mnoho nových myšlienok, ale sínus a kosínus sa tiahnu naprieč matematikou a fyzikou a je teda dobré mať vžité ich vlastnosti.

Začneme definíciou funkcií sínus a kosínus, zvolil som jednu z mnohých – využíva pojem komplexného čísla. Ak komplexné čísla nepoznáte, nedajte sa tým odradiť, môžem ich v prípade záujmu na prednáške zaviesť – nie je to nič ťažké.

Definícia. (sin, cos) *Nech komplexné číslo z zviera s osou x uhol φ (tento uhol sa nazýva argumentom z), potom sínusom φ nazvem podiel imaginárnej časti z k veľkosti z a kosínusom φ podiel reálnej časti z k veľkosti z. V písmenkách to znamená*

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \quad \text{a} \quad \cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}.$$

Z definície vidíme, že súčet $\cos\varphi + i\,\sin\varphi = \frac{z}{|z|}$, teda každé komplexné číslo sa dá zapísať v tvare $z = |z|(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$. S týmto poznatkom môžeme pristúpiť k jedinej vete prednášky.

Veta. (Moivreova) *Súčin dvoch komplexnýxh jednotiek (komplexné číslo s velkosťou 1) je opäť komplexná jednotka, ktorej argument je rovný súčtu argumentov oboch činiteľov. Teda platí*

$$(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)(\cos\beta + i\,\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\,\sin(\alpha+\beta).$$

Z Moivreovej vety hravo plynie Moivreov vzorec

$$(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\,\sin n\alpha.$$

Ešte naznačíme prečo platí slávny Eulerov vzťah

$$\exp(i\,\varphi) = \cos\varphi + i\,\sin(\varphi)$$

a vrhneme sa na kvantum vzorcov ktoré platia pre sínus a kosínus. Pričom sa zameriame hlavne na to ktoré si treba pamätať a ako rýchlo odvodiť ten ktorý zrovna potrebujeme.

No a nakoniec si ukážeme príklady na niektoré z mnohých využití sínu a kosínu. Riešenie rovníc (goniometrické rovnice, substitúcie za goniometrické funkcie), geometria, ... a ďalšie podla nálady a času.