Goniometrické funkce

David Opěla

Úvod

Na střední (a částečně už i základní) škole se mnozí z Vás jistě seznámili s tzv. goniometrickými funkcemi (zvanými též trigonometrické) – sinus, kosinus, tangens a kotangens, a také s funkcemi k nim inverzními (tzv. funkcemi cyklometrickými). Naučili jste se několik vět, pomocí nichž lze z tří známých údajů (délek stran či velikostí vnitřních úhlů) spočítat ty zbývající. Je zde ovšem jedna obtíž: umíte je opravdu spočítat? K tomu potřebujeme počítat hodnoty těchto goniometrických funkcí (či funkcí cyklometrických). To za nás v praxi samozřejmě učiní kalkulátor, ale ten nerýsuje příslušný pravoúhlý trojúhelník.

Středoškolské definice goniometrických funkcí

Na střední škole se tyto funkce zavádějí dvěma způsoby. Nejprve se uvažuje pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C o stranách délek $a = |BC|, b = |AC|, c = |AB|$ a úhlech α, β, γ. Definuje se $\sin\alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$. Tato definice má tu nevýhodu, že je pouze pro ostré úhly.

Jiná definice je pomocí jednotkové kružnice. V rovině s kartézskou soustavou souřadnic narýsujeme kružnici se středem v počátku a poloměrem 1. Úhel α nanášíme od x-ové osy proti směru hodinových ručiček. Narýsujeme rameno tohoto úhlu a úvážíme bod, kde se toto rameno protne s jednotkovou kružnicí. Jeho y-ová souřadnice je $\sin\alpha$, x-ová je $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Definice pomocí vlastností

Na vysoké škole se goniometrické funkce často definují jako jediná dvojice funkcí f, g, která splňuje následující podmínky:

1. Obě jsou definovány pro všechna x, tj. $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$,
$g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$,
$g(-x) = g(x)$,
$f(-x) = -f(x)$.

3. Existuje kladné číslo, které označíme π, takové, že funkce $f(x)$ je rostoucí v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, $\quad f(\frac{\pi}{2}) = 1$ a $f(0) = 0$.

4. Platí : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Definice řadami

Definice řadami je jiná možná definice, která se používá také k důkazu existence dvojice funkcí, jež splňuje předchozí definici. Sinus i kosinus se definuje jako součet absolutně konvergentní mocninné řady s nekonečným poloměrem konvergence, což zhruba znamená, že řady, kterými jsou tyto funkce definovány, mají součet v každém bodě. Tedy jest:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Tangens a kotangens jsou opět podílem těchto dvou funkcí a pomocí řad lze také poměrně jednoduše vyjádřit funkce arkustangens a arkuskotangens:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)},$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}.$$

A protože, jak si ukážeme, pro arkussinus a arkuskosinus platí

$$\arccos x = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}},$$

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}},$$

umíme už spočítat hodnoty všech zmiňovaných funkcí.

Vlastnosti goniometrických funkcí

Na přednášce si ukážeme, jak tyto definice spolu vzájemně souvisí a jaký význam má číslo π. Tyto funkce mají samozřejmě spoustu dalších vlastností, z nichž jistě mnohé znáte. Všechny trigonometrické funkce jsou periodické, funkce $\sin x, \cos x$ mají periodu 2π a jsou spojité na celé reálné ose, $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ periodu π, ale jsou spojité pouze na jistých intervalech délky π. Ukážeme si, jak se tyto definice mohou rozšířit do oboru komplexních čísel a jak souvisí s exponenciálou, mimo jiné známou Moivreovu větu

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx),$$

exponenciální tvar komplexního čísla

$$e^{i\xi} = \cos \xi + i \sin \xi$$

a odvodíme další vztahy, například

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Goniometrické rovnice

V této kapitolce si vysvětlíme, jak řešit rovnice, v nichž se vyskytuje neznámá jako argument trigonometrických funkcí. Naším cílem bude rovnici převést na tvar $f(x) = a$, kde f je některá z goniometrických funkcí, a je konstanta. Tento tvar rovnice se nazývá *základní*. Tím již je opravdu rovnice vyřešena, neboť pomocí vztahů pro cyklometrické funkce neznámou určíme. Tyto rovnice většinou řešíme užitím vzorců, které jsou uvedeny výše, často využíváme substituce nebo rovnici převedeme na tzv. *součinový tvar*, kde na jedné straně jest 0 a na druhé součin funkcí. Z algebry víme, že rovnost nastává, právě když alespoň jeden z činitelů je roven nule.