Geometrie trojúhelníka

Martin Töpfer

Abstrakt. Přehled známých vlastností trojúhelníka ilustrovaný na mnoha úlohách, které pochází hlavně z matematických olympiád posledních let.

Cílem této přednášky je důkladné seznámení se známými vlastnostmi trojúhelníka. Sami uvidíte, že dobrá orientace v trojúhelníku je klíčem k vyřešení mnoha úloh nejen z české MO. Též si ukážeme, jak se dá rovnou ze zadání geometrické úlohy poznat, které postupy bude třeba použít. To vše samozřejmě na nepřeberném množství příkladů. Směle do toho!

Výšky

Vůbec nejvíce zajímavých vlastností v trojúhelníku mají výšky. Obecně se dá říci, že výšky jsou pěkné díky tomu, že vytvářejí mnoho tětivových čtyřúhelníků (těch pravých úhlů!) a snadno se tak dá vyjádřit téměř kterýkoliv úhel jimi určený. Pomocí výšek se též dá pracovat se středy různých úseček, jak dále uvidíme. Úlohy s výškami jsou těmi nejpříjemnějšími.

Tvrzení. *Výšky se protínají v jednom bodě. Budeme ho nazývat ortocentrum a značit H. Zapamatujeme si, že $|\sphericalangle AHB| = 180^\circ - \gamma$. Ortocentrum leží uvnitř trojúhelníka, právě když je trojúhelník ostroúhlý.*

Tvrzení. *Zobrazíme-li ortocentrum osově dle kterékoliv strany nebo středově dle kteréhokoliv středu strany, obraz padne na kružnici opsanou.*

Tvrzení. *Středy stran, paty výšek a středy úseček spojujících vrcholy s ortocentrem leží na jedné kružnici. Ta se jmenuje kružnice devíti bodů nebo též Feuerbachova kružnice. Tato kružnice má poloviční poloměr než kružnice opsaná.*

Příklad. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice ortocenter $\triangle ABC$ a $\triangle ABD$ je rovnoběžná s CD. (MO 58–A–I–2)

Příklad. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec.

Příklad. V ostroúhlém trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme P patu výšky z vrcholu C na stranu AB, H průsečík výšek, O střed kružnice opsané, D průsečík polopřímky CO se stranou AB a E střed úsečky CD. Dokažte, že přímka EP prochází středem úsečky OH. (MO 60–A–III–5)

Příklad. Z paty výšky vedené z vrcholu A trojúhelníka ABC veďme postupně kolmice na zbylé dvě výšky a na strany b a c. Ukažte, že paty těchto kolmic leží v přímce.

Příklad. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AX, BY, CZ a ortocentrem H. Nechť M a N jsou postupně středy úseček BC a AH. Dokažte $MN \perp YZ$.
(Francouzská MO)

Osy úhlů a Švrčkův bod

I osy úhlů nám dovolí pěkně počítat vzniklé úhly. Nicméně pro ně platí i zajímavý metrický vztah a nemůžeme si být úplně jisti, z které strany se na úlohu vrhnout. Počítání úhlů je ovšem častější, a je-li ve hře i kružnice opsaná, není o čem přemýšlet (Švrčkův bod).

Tvrzení. *Osy úhlů se protínají v jednom bodě. Jejich průsečíkem je střed kružnice vepsané a jeho standardní označení je I. Zapamatujeme si, že $|\sphericalangle AIB| = 90° + \frac{\gamma}{2}$.*

Tvrzení. *Buď ABC trojúhelník a nechť $D \in BC$ leží na ose úhlu α. Pak platí*

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Tvrzení. *Osa strany, osa protějšího úhlu a kružnice opsaná se protínají v jednom bodě. Budeme ho nazývat Švrčkův bod a značit $\check{S}$.*

Tvrzení. *Pro Švrčkův bod $\check{S}$ příslušející straně AB platí*

$$|\check{S}A| = |\check{S}B| = |\check{S}I|,$$

kde I je střed kružnice vepsané.

Příklad. Trojúhelníku ABC je opsána kružnice k. Osa strany AB protne kružnici k v bodě K, který leží v polorovině opačné k polorovině ABC. Osy stran AC a BC protnou přímku CK po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné. (MO 58–B–I–5)

Příklad. Označme I střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že kolmice na přímku CI vedená bodem I protne přímku AB v bodě M. Dokažte, že kružnice trojúhelníku ABC opsaná protne úsečku CM ve vnitřním bodě N a že přímky NI a MC jsou navzájem kolmé. (MO 63–A–I–3)

Příklad. V rovině je dán úhel XSY a kružnice k o středu S. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí k, jehož vrcholy A a B leží po řadě na polopřímkách SX a SY. Určete množinu vrcholů C všech takových trojúhelníků ABC. (MO 57–A–S–3)

Příklad. Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a P jeho vnitřní bod, pro který platí

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Dokažte, že $|AP| \geq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když $P = I$.

(IMO 2006)

Příklad. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. (MO 56-A–III–2)

Příklad. $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Označme paty kolmic z bodu D na strany AB, BC, CA po řadě P, Q, R. Dokažte, že osy úhlů $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle CDA$ se protínají na přímce AC, právě když $|RP| = |RQ|$. (IMO 2003)

Kružnice opsaná

Kružnice opsaná samozřejmě též vytváří tětivové čtyřúhelníky, a proto bude i zde počítání úhlů naší hlavní zbraní. Občas si ovšem práci s počítáním úhlů můžeme usnadnit tím, že použijeme nějaké známé tvrzení, například to o Simsonově přímce.

Tvrzení. *Osy stran trojúhelníka se protínají v jednom bodě. Je jím střed kružnice opsané a značit ho budeme O. Zapamatujeme si, že $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$. Bod O leží uvnitř trojúhelníka, právě když je trojúhelník ostroúhlý.*

Tvrzení. *Střed kružnice opsané leží na jedné přímce s těžištěm a ortocentrem trojúhelníka, přičemž platí poměr $2|OT| = |TH|$. Tato přímka se nazývá Eulerova přímka.*

Tvrzení. *Buď ABC trojúhelník a D bod na jeho kružnici opsané. Pak paty kolmic z bodu D na strany trojúhelníka leží v přímce. Tato přímka se nazývá Simsonovou přímkou bodu D.*

Příklad. Ukažte, že střed Feuerbachovy kružnice leží na Eulerově přímce.

Příklad. Označme S střed kružnice vepsané, T težiště a V průsečík výšek daného rovnoramenného trojúhelníku, který není rovnostranný.

(a) Dokažte, že bod S je vnitřním bodem úsečky TV.
(b) Určete poměr délek stran daného trojúhelníku, je-li bod S středem úsečky TV.

(MO 61–A–I–3)

Příklad. Na kratším oblouku CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P. Paty kolmic z bodu P na přímky AB, AC a BD označme postupně K, L a M. Ukažte, že úhel LKM má velikost $45°$, právě když $ABCD$ je čtverec. (MO 58–A–III–2)

Příklad. Uvažme body A, B, C, D a E takové, že $ABCD$ je rovnoběžník a $BCED$ je tětivový čtyřúhelník. Bodem A veďme přímku ℓ. Ta protne úsečku DC v bodě F a přímku BC v bodě G. Pokud platí $|EF| = |EG| = |EC|$, ukažte, že ℓ je osa úhlu DAB. (IMO 2007)

Těžnice

Ze všech dosud zmíněných bodů a čar v trojúhelníku je s těžnicemi největší potíž. Nejsou-li ony středy úseček zároveň středy nějakých kružnic, je počítání úhlů téměř neúčinné. Je třeba nějak využít onu shodnost. Nejčastějším postupem je dokreslování například středních příček. Je možné též užít obsahy nebo třeba stejnolehlost.

Tvrzení. *Těžnice trojúhelníka se protínají v jediném bodě, jímž je těžiště T. Zapamatujeme si, že úhel ATB nelze jednoduše spočítat. Těžnice se dělí v poměru* $2:1$.

Tvrzení. (ne úplně známé, ale užitečné) *Je dán trojúhelník ABC. Množina bodů X, pro něž mají trojúhelníky ABX a ACX stejný obsah, je právě těžnice na stranu a (rozuměj celá přímka).*

Příklad. Zjistěte, jaký je největší možný obsah trojúhelníku ABC, jehož těžnice mají délky vyhovující nerovnostem $t_a \leq 2$, $t_b \leq 3$, $t_c \leq 4$. (MO 61–A–III–2)

Příklad. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme S jeho průsečík úhlopříček a paty kolmic z bodu S na přímky AB a CD označme E a F. Dokažte, že osa úsečky EF prochází středy stran BC a DA.

Příklad. Je dána kružnice k se středem S a její tečna p s bodem dotyku A. Na přímce p leží též bod B. Úsečku AB zobrazíme v nějakém otočení kolem bodu S na úsečku $A'B'$. Dokažte, že přímka AA' půlí úsečku BB'. (Turnaj měst)

Příklad. V $\triangle ABC$ je I střed kružnice vepsané, M střed strany AC a N střed oblouku AC kružnice opsané (toho, který obsahuje B). Dokažte $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle INB|$. (KMS, gama)

Příklad. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník se shodnými stranami AB a CD, které nejsou rovnoběžné. Označme E, F středy úhlopříček AC a BD. Přímka EF protíná úsečky AB a CD po řadě v bodech G a H. Ukažte, že $|\sphericalangle AGH| = |\sphericalangle DHG|$. (MEMO 2009)

Kružnice vepsaná a připsané

Krom zjevného faktu, že můžeme kupříkladu počítat úhly či provádět různé stejnolehlosti, je velmi užitečné též počítání délek různých úseček. U těchto kružnic tedy též většinou váháme, který přístup použít.

Tvrzení. *Buďte X, Y a Z body, v nichž se kružnice vepsaná trojúhelníka ABC dotýká postupně stran a, b a c. Pak platí*

$$|BX| = \frac{a+c-b}{2}.$$

Obdobné vztahy platí i pro délky ostatních úseků.

Tvrzení. *Podobně se dají vyjádřit délky úseků pro body dotyku s kružnicí připsanou.*

Tvrzení. *Nechť ρ je poloměr kružnice vepsané, S obsah trojúhelníka a s polovina jeho obvodu. Pak platí*

$$S = \rho s.$$

Příklad. Na straně AB trojúhelníka ABC označme X bod dotyku s kružnicí vepsanou a Y bod dotyku s příslušnou kružnicí vepsanou. Ukažte, že střed úsečky XY je též středem úsečky AB.

Příklad. $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník. Ukažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a CDA mají vnější dotyk.

Příklad. Na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC uvažujme body P a Q takové, že $|AP| = |AC|$ a $|BQ| = |BC|$. Označme M průsečík kolmice z vrcholu A na přímku CP a kolmice z vrcholu B na přímku CQ. Dokažte, že přímky PM a QM jsou navzájem kolmé.

Další zajímavá tvrzení

Tvrzení. (Feuerbach) *Feuerbachova kružnice se dotýká kružnice vepsané i všech kružnic připsaných.*

Tvrzení. (Ceva) *Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC a AB. Přímky AX, BY a CZ procházejí jedním bodem, právě když platí*

$$\frac{|AZ| \cdot |BX| \cdot |CY|}{|BZ| \cdot |CX| \cdot |AY|} = 1.$$

Tvrzení. (Menelaus) *Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě body na přímkách BC, AC a AB (jeden z nich je vně ABC). Body X, Y a Z leží v přímce, právě když platí ten samý poměr*

$$\frac{|AZ| \cdot |BX| \cdot |CY|}{|BZ| \cdot |CX| \cdot |AY|} = 1.$$

Tvrzení. (Morley) *Buď ABC trojúhelník. Bodem A a vnitřkem $\triangle ABC$ veďme polopřímku AX_1 takovou, že $|\sphericalangle BAX_1| = \alpha/3$, a naopak bodem B veďme polopřímku BX_2 (opět procházející vnitřkem ABC) takovou, že $|\sphericalangle ABX_2| = \beta/3$. Průsečík těchto dvou polopřímek označme C'. Obdobně sestrojíme body A' a B'. Pak je trojúhelník $A'B'C'$ rovnostranný.*

Tvrzení. (Napoleon) *Jestliže nad stranami daného trojúhelníka ABC jsou vně, resp. zevnitř sestrojeny rovnostranné trojúhelníky, pak jejich středy tvoří rovnostranný trojúhelník.*

Poslední várka příkladů

Příklad. V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC, pro něž platí: Vrcholy A a B, průsečík výšek H a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici. (MO 55–A–III–4)

Příklad. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Označme D patu výšky z bodu C. Nechť X je bod uvnitř úsečky CD. Označme K ten bod na úsečce AX, pro který $|BK| = |BC|$. Podobně označme L ten bod na úsečce BX, pro který $|AL| = |AC|$. Dále nechť M je průsečík úseček AL a BK. Ukažte, že $|MK| = |ML|$. (IMO 2012)

Příklad. Ukažte, že uvnitř $\triangle ABC$ existuje právě jeden bod P takový, že

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |AB|^2 = |PB|^2 + |PC|^2 + |BC|^2 = |PC|^2 + |PA|^2 + |CA|^2.$$

(IMO shortlist)

Příklad. V trojúhelníku ABC, jehož strany vyhovují rovnosti $|AB| + |BC| = 3|AC|$, označme I střed jeho vepsané kružnice a D a E body, v nichž se vepsaná kružnice postupně dotýká stran AB, BC. Jsou-li K a L obrazy bodů D a E ve středové souměrnosti se středem I, je čtyřúhelník $ACKL$ tětivový. Dokažte. (IMO shortlist 2005)

Příklad. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník takový, že $|AB| \neq |AC|$. Kružnice o průměru BC protíná strany AB a BC postupně v bodech M a N. Označme O střed strany BC. Osy úhlů BAC a MON se protínají v bodě R. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům BMR a CNR se protínají na straně BC. (IMO shortlist 2004)

Zdroje

Tento příspěvek vychází ze stejnojmenné přednášky Michala Rolínka. Doplnil jsem ji hlavně o úlohy z olympiád z posledních pěti let.