

Geometrie trojúhelníka

Michal „Kenny“ Rolínek

ABSTRAKT. Přednáška důkladně seznamuje se známými vlastnostmi trojúhelníka. Též ukazuje, jak se dá rovnou ze zadání geometrické úlohy poznat, které postupy bude třeba použít. To vše samozřejmě na nepřeborném množství příkladů.

Cílem této přednášky je důkladné seznámení se známými vlastnostmi trojúhelníka. Sami uvidíte, že dobrá orientace v trojúhelníku je klíčem k vyřešení mnoha úloh nejen z české MO. Též si ukážeme, jak se dá rovnou ze zadání geometrické úlohy poznat, které postupy bude třeba použít. To vše samozřejmě na nepřeborném množství příkladů. Směle do toho!

Výšky

Vůbec nejvíce zajímavých vlastností v trojúhelníku mají výšky. Obecně se dá říci, že výšky jsou pěkné díky tomu, že vytvářejí mnoho tětíkových čtyřúhelníků (těch pravých úhlů!) a snadno se tak dá vyjádřit téměř kterýkoliv úhel jimi určený. Pomocí výšek se též dá pracovat se středy různých úseček, jak dále uvidíme. Úlohy s výškami jsou těmi nejpříjemnějšími.

Tvrzení. *Výšky se protínají v jednom bodě. Budeme ho nazývat ortocentrum a značit H . Zapamatujeme si, že $|\sphericalangle AHB| = 180 - \gamma$. Ortocentrum leží uvnitř trojúhelníka, právě když je trojúhelník ostroúhlý.*

Tvrzení. *Zobrazíme-li ortocentrum osově dle kterékoliv strany nebo středově dle kteréhokoliv středu strany, obraz padne na kružnici opsanou.*

Tvrzení. *Středy stran, paty výšek a středy úseček spojujících vrcholy s ortocentrem leží na jedné kružnici. Ta se jmenuje kružnice devíti bodů nebo též Feuerbachova kružnice. Tato kružnice má poloviční poloměr než kružnice opsaná.*

Příklad. *Je dán tětíkový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice ortocenter $\triangle ABC$ a $\triangle ABD$ je rovnoběžná s CD .*

Příklad. *Nechť $ABCD$ je tětíkový čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p , q kolmice z bodů D , C na přímkou AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q . Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec.*

Příklad. *Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme K a L paty výšek z vrcholů A a B , M střed strany AB a V průsečík výšek trojúhelníku ABC . Dokažte, že osa úhlu KML prochází středem úsečky VC .*

KLÍČOVÁ SLOVA. Planimetrie, trojúhelník, geometrie, Švrčkův bod, Simsonova přímka, Feuerbachova kružnice, ortocentrum, kružnice vepsaná, kružnice opsaná, kružnice připsaná, těžnice, osy úhlů

Příklad. Necht ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž vnitřní úhel při vrcholu A má velikost 45° . Označme D patu výšky z vrcholu C . Uvažujme dále libovolný vnitřní bod P výšky CD . Dokažte tvrzení: Přímký AP a BC jsou navzájem kolmé, právě když úsečky AP a BC jsou shodné. (školní kolo 2008)

Příklad. Z paty výšky vedené z vrcholu A trojúhelníka ABC vedme postupně kolmice na zbylé dvě výšky a na strany b a c . Ukažte, že paty těchto kolmic leží v přímce.

Příklad. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AX , BY , CZ a ortocentrem H . Necht M a N jsou postupně středy úseček BC a AH . Dokažte $MN \perp YZ$. (Francouzská MO)

Osy úhlů a Švrčkův bod

I osy úhlů nám dovolí pěkně počítat vzniklé úhly. Nicméně pro ně platí i zajímavý metrický vztah a nemůžeme si být úplně jisti, z které strany se na úlohu vrhnout. Počítání úhlů je ovšem častější a je-li ve hře i kružnice opsaná, není o čem přemýšlet (Švrčkův bod).

Tvrzení. *Osy úhlů se protínají v jednom bodě. Jejich průsečíkem je střed kružnice vepsané a jeho standardní označení je I . Zapamatujeme si, že $|\sphericalangle AIB| = 90 + \frac{\alpha}{2}$.*

Tvrzení. *Bud' ABC trojúhelník a necht' $D \in BC$ leží na ose úhlu α . Pak platí*

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Tvrzení. *Osa strany, osa protějšího úhlu a kružnice opsaná se protínají v jednom bodě. Budeme ho nazývat Švrčkův bod a značit \check{S} .*

Tvrzení. *Pro Švrčkův bod \check{S} příslušející straně AB platí*

$$|\check{S}A| = |\check{S}B| = |\check{S}I|,$$

kde I je střed kružnice vepsané.

Příklad. V rovině je dán úhel $XS Y$ a kružnice k o středu S . Uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí k , jehož vrcholy A a B leží po řadě na polopřímkách SX a SY . Určete množinu vrcholů C všech takových trojúhelníků ABC . (školní kolo 2007)

Příklad. Necht' I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a P jeho vnitřní bod, pro který platí

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|$$

. Dokažte, že $|AP| \geq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když $P = I$.
(IMO 2006)

Příklad. V tětíovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L , M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA , BCD . Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímkách AC a BD . Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný.
(Celostátní kolo 2007)

Příklad. $ABCD$ je tětíový čtyřúhelník. Označme paty kolmic z bodu D na strany AB , BC , CA po řadě P , Q , R . Dokažte, že osy úhlů $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle CDA$ se protínají na přímce AC , právě když $|RP| = |RQ|$.
(IMO 2003)

Kružnice opsaná

Kružnice opsaná samozřejmě též vytváří tětíové čtyřúhelníky, a proto bude i zde počítání úhlů naší hlavní zbraní. Občas si ovšem práci s počítáním úhlů můžeme usnadnit tím, že použijeme nějaké známé tvrzení, například to o Simsonově přímce.

Tvrzení. *Osy stran trojúhelníka se protínají v jednom bodě. Je jím střed kružnice opsané a značit ho budeme O . Zapamatujeme si, že $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$. Bod O leží uvnitř trojúhelníka, právě když je trojúhelník ostroúhlý.*

Tvrzení. *Střed kružnice opsané leží na jedné přímce s těžištěm a ortocentrem trojúhelníka. Tato přímka se nazývá Eulerova přímka.*

Tvrzení. *Bud' ABC trojúhelník a D bod na jeho kružnici opsané. Pak paty kolmic z bodu D na strany trojúhelníka leží v přímce. Tato přímka se nazývá Simsonovou přímkou bodu D .*

Příklad. Ukažte, že střed Feuerbachovy kružnice leží na Eulerově přímce.

Příklad. Na kratším oblouku CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P . Paty kolmic z bodu P na přímkách AB , AC a BD označme postupně K , L a M . Ukažte, že úhel LKM má velikost 45° , právě když $ABCD$ je čtverec.
(Celostátní kolo 2009)

Příklad. Uvažme body A , B , C , D a E takové, že $ABCD$ je rovnoběžník a $BCED$ je tětíový čtyřúhelník. Bodem A vedme přímku ℓ . Ta protne úsečku DC v bodě F a přímku BC v bodě G . Pokud platí $|EF| = |EG| = |EC|$, ukažte, že ℓ je osa úhlu DAB .
(IMO 2007)

Těžnice

Ze všech dosud zmíněných bodů a čar v trojúhelníku je s těžnicemi největší potřeba. Nejsou-li ony středy úseček zároveň středy nějakých kružnic, je počítání úhlů téměř neúčinné. Je třeba nějak využít onu shodnost. Nejčastějším postupem je

dokreslování například středních příček. Je možné též užít obsahy nebo třeba stej-
nolehlost.

Tvrzení. *Těžnice trojúhelníka se protínají v jediném bodě, jímž je těžiště T . Zapamatujeme si, že úhel ATB nelze jednoduše spočítat. Těžnice se též dělí v poměru $2 : 1$.*

Tvrzení. (ne úplně známé, ale užitečné) *Je dán trojúhelník ABC . Množina bodů X , pro něž mají trojúhelníky ABX a ACX stejný obsah, je právě těžnice na stranu a (rozuměj celá přímka).*

Příklad. *Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme S jeho průsečík úhlopříček a paty kolmic z bodu S na přímky AB a CD označme E a F . Dokažte, že osa úsečky EF prochází středy stran BC a DA . (Výběrko 2008?)*

Příklad. *Je dána kružnice k se středem S a její tečna p s bodem dotyku A . Na přímkou p leží též bod B . Úsečku AB zobrazíme v nějakém otočení kolem bodu S na úsečku $A'B'$. Dokažte, že přímka AA' pólí úsečku BB' . (Turnaj měst)*

Příklad. *V $\triangle ABC$ je I střed kružnice vepsané, M střed strany AC a N střed oblouku AC kružnice opsané (toho, co obsahuje B). Dokažte $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle INB|$. (KMS – gama)*

Příklad. *Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník se shodnými stranami AB a CD , které nejsou rovnoběžné. Označme E, F středy úhlopříček AC a BD . Přímka EF protíná úsečky AB a CD po řadě v bodech G a H . Ukažte, že $|\sphericalangle AGH| = |\sphericalangle DHG|$. (MEMO 2009)*

Kružnice vepsaná a připsaná

Krom zjevného faktu, že můžeme kupříkladu počítat úhly či provádět různé stej-
nolehlosti, je velmi užitečné též počítání délek různých úseček. U těchto kružnic
tedy též většinou váháme, který přístup použít.

Tvrzení. *Buďte X, Y a Z body, v nichž se kružnice vepsaná trojúhelníka ABC dotýká postupně stran a, b a c . Pak platí*

$$|BX| = \frac{a + c - b}{2}.$$

Obdobné vztahy platí i pro délky ostatních úseček.

Tvrzení. *Podobně se dají vyjádřit délky úseček pro body dotyku s kružnicí připsanou.*

Tvrzení. *Nechť ρ je poloměr kružnice vepsané, S obsah trojúhelníka a s polovina jeho obvodu. Pak platí*

$$S = \rho s.$$

Příklad. Na straně AB trojúhelníka ABC označme X bod dotyku s kružnicí vepsanou a Y bod dotyku s příslušnou kružnicí vepsanou. Ukažte, že střed úsečky XY je též středem úsečky AB .

Příklad. $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník. Ukažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a CDA mají vnější dotyk.

Příklad. Na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC uvažujme body P a Q takové, že $|AP| = |AC|$ a $|BQ| = |BC|$. Označme M průsečík kolmice z vrcholu A na přímkou CP a kolmice z vrcholu B na přímkou CQ . Dokažte, že přímky PM a QM jsou navzájem kolmé.

Další zajímavá tvrzení

Tvrzení. (Feuerbach) *Feuerbachova kružnice se dotýká kružnice vepsané i všech kružnic připsaných.*

Tvrzení. (Morley) *Buď ABC trojúhelník. Bodem A a vnitřkem $\triangle ABC$ vedme polopřímku AX_1 takovou, že $|\sphericalangle BAX_1| = \frac{\alpha}{3}$, a naopak bodem B vedme polopřímku BX_2 (opět procházející vnitřkem ABC) takovou, že $|\sphericalangle ABX_2| = \frac{\beta}{3}$. Průsečík těchto dvou polopřímek označme C' . Obdobně sestrojíme body A' a B' . Pak je trojúhelník $A'B'C'$ rovnostranný.*

Tvrzení. (Napoleon) *Jestliže nad stranami daného trojúhelníka ABC jsou vně, resp. zevnitř sestrojeny rovnostranné trojúhelníky, pak jejich středy tvoří rovnostranný trojúhelník.*

Tvrzení. (Ceva) *Je dán trojúhelník ABC . Body X , Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC , AC a AB . Přímky AX , BY a CZ procházejí jedním bodem, právě když platí*

$$\frac{|AZ||BX||CY|}{|BZ||CX||AY|} = 1.$$

Tvrzení. (Menelaus) *Je dán trojúhelník ABC . Body X , Y a Z jsou po řadě body na přímkách BC , AC a AB (jeden z nich je vně ABC). Body X , Y a Z leží v přímce, právě když platí ten samý poměr*

$$\frac{|AZ||BX||CY|}{|BZ||CX||AY|} = 1.$$

Poslední várka příkladů

Příklad. V rovině je dána úsečka AB . Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC , pro něž platí: Vrcholy A a B , průsečík výšek H a střed I

kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici.

(Celostátní kolo 2006)

Příklad. Ukažte, že uvnitř $\triangle ABC$ existuje právě jeden bod P takový, že $|PA|^2 + |PB|^2 + |AB|^2 = |PB|^2 + |PC|^2 + |BC|^2 = |PC|^2 + |PA|^2 + |CA|^2$.

(IMO shortlist)

Příklad. V trojúhelníku ABC , jehož strany vyhovují rovnosti $|AB| + |BC| = 3|AC|$, označme I střed jeho vepsané kružnice a D a E body, v nichž se vepsaná kružnice postupně dotýká stran AB , BC . Jsou-li K a L obrazy bodů D a E ve středové souměrnosti se středem I , je čtyřúhelník $ACKL$ tětíkový. Dokažte.

(IMO shortlist 2005)

Příklad. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník takový, že $|AB| \neq |AC|$. Kružnice o průměru BC protíná strany AB a BC postupně v bodech M a N . Označme O střed strany BC . Osy úhlů BAC a MON se protínají v bodě R . Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům BMR a CNR se protínají na straně BC .

(IMO shortlist 2004)