Geometrické nerovnosti

David Hruška

Abstrakt. Příspěvek obsahuje výběr z geometrických nerovností. V první části se zaměřuje na různé aplikace trojúhelníkové nerovnosti, ve druhé uvádí několik známých a obtížnějších tvrzení.

Úmluva. Délky stran trojúhelníka ABC budeme značit a, b, c a příslušné protější vnitřní úhly α, β, γ.

Úloha. (Motivační) Pro kladná čísla splňující $a+b+c=8$ dokažte

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{4+b^2}+\sqrt{9+c^2}\geq 10.$$

Zbraně

Připomeňme si následující tři užitečná tvrzení.

Tvrzení. (Kosinová věta) *Platí* $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.

Tvrzení. (AG nerovnost) *Pro nezáporná čísla* $a_1,\dots,a_n$ *platí*

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

Rovnost nastává pro $a_1=\dots=a_n$.

Tvrzení. (Cauchy–Schwarzova nerovnost) *Pro reálná čísla* $a_1,\dots,a_n$ a $b_1,\dots,b_n$ *platí*

$$\sum a_i^2\sum b_i^2\geq\left(\sum a_ib_i\right)^2.$$

Rovnost nastává, pokud $a_i=\lambda b_i$ *pro nějaké* $\lambda\in\mathbb{R}$.

Troj(ostro)úhelníková nerovnost

Začneme jednoduchou, ale velmi užitečnou a fundamentální nerovností a její geometričtější modifikací.

Tvrzení. *Nezáporná reálná čísla a, b, c tvoří strany trojúhelníka, právě když splňují $a+b>c$, $b+c>a$ a $c+a>b$ (pokud připustíme degenerované trojúhelníky změní se nerovnosti na neostré). Tento trojúhelník je ostroúhlý, právě když platí $a^2+b^2>c^2$, $b^2+c^2>a^2$ a $c^2+a^2>b^2$ (rovnosti připouštějí pravoúhlé trojúhelníky).*

Často je výhodnější jedna z následujících formulací:

Tvrzení. *Nejkratší křivka (lomená čára) spojující body A a B je úsečka AB.*

Tvrzení. (substituce) *Kladná čísla a, b a c jsou délkami stran nějakého trojúhelníka, právě když existují kladná čísla x, y a z splňující $a=x+y$, $b=x+z$ a $c=y+z$.*

Úloha 1. V konvexním čtyřúhelníku najděte bod s nejmenším součtem vzdáleností od vrcholů. Jak se výsledek změní v nekonvexním případě?

Úloha 2. Pro bod P uvnitř konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ dokažte $AP+PD<AB+BC+CD$.

Úloha 3. V trojúhelníku ABC označme M střed BC. Dokažte $AM<\dfrac{AB+AC}{2}$.

Úloha 4. Dokažte, že ve čtyřúhelníku existuje úhlopříčka u a strany x, y tak, že platí $x^2+y^2\le u^2$.

Úloha 5. Dokažte

(i) $(a+b+c)^2\le 4(ab+bc+ca)$,

(ii) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$,

(iii) $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{a+c-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\ge 3$.

Ptolemaiova nerovnost

Tvrzení. (Ptolemaiova nerovnost) *Pro strany čtyřúhelníka a, b, c, d a jeho úhlopříčky e, f platí $ac+bd\ge ef$. Rovnost nastává právě pro tětivové čtyřúhelníky.*

Prosíme potlesk, přicházejí … aplikace!

Úloha 6. Nechť P je vnitřní bod rovnoběžníku $ABCD$ o obsahu S. Ukažte $|AP|\cdot|CP|+|BP|\cdot|DP|\ge S$.

Úloha 7. (Těžká) V konvexním šestiúhelníku $ABCDEF$ platí $|AB|=|BC|$, $|CD|=|DE|$, $|EF|=|FA|$. Ukažte $\dfrac{|BC|}{|BE|}+\dfrac{|DE|}{|DA|}+\dfrac{|FA|}{|FC|}\ge\dfrac{3}{2}$.

Kdy nastává rovnost?

Další klasická tvrzení

Úloha. (Fermatův bod) V trojúhelníku ABC najděte bod P minimalizující hodnotu $|AP| + |BP| + |CP|$.

Poznámka. Všimněte si, že pro čtyřúhelník byla tato úloha výrazně jednodušší.

Úloha. (Nejmenší obvod) Je dán trojúhelník ABC. Najděte trojúhelník s vrcholy na jeho stranách (na každé jeden) s co nejmenším obvodem.

Těžký kalibr

Věta. (Erdős – Mordell) *Uvnitř trojúhelníka ABC uvažme bod P. Jeho kolmé projekce na strany označme D, E a F. Pak platí*

$$|PA| + |PB| + |PC| \geq 2\big(|PD| + |PE| + |PF|\big)$$

a rovnost nastává právě pro rovnostranný trojúhelník.

Věta. (Finsler – Hadwiger) *Platí*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Věta. (Euler) *Platí $|OI|^2 = R(R-2r)$, kde R a r jsou poloměry kružnice opsané a vepsané. Speciálně tedy $R \geq 2r$.*

Návody

1. Je to průsečík úhlopříček, případě vrchol s nekonvexním vnitřním úhlem.

2. Bodem P veďte přímku mimo vnitřek trojúhelníku APD, která odsekne kus čtyřúhelníku. Nakombinujte několik trojúhelníkových nerovností.

3. Doplňte na rovnoběžník $ABXC$.

4. Aspoň jeden vnitřní úhel čtyřúhelníka není ostrý.

5. (i) Sečtěte tři vhodné násobky t.n. (ii) Použijte substituci. (iii) Použijte $\sum \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum a_i)^2}{\sum b_i}$, kladnost jmenovatelů plyne z t.n.

6. Posuňte trojúhelník CDP na stranu AB (tedy $D \to A$, $C \to B$ a $P \to P'$. Použijte Ptolemaiovu nerovnost na čtyřúhelník $APBP'$.

7. Označte $|AC| = x$, $|CE| = y$, $|EA| = z$ a s pomocí Ptolemaia dokažte, že

$$\frac{|BC|}{|BE|} + \frac{|DE|}{|DA|} + \frac{|FA|}{|FC|} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

kde poslední nerovnost plyne z Cauchy–Schwarze.

Literatura a zdroje

[1] Arthur Engel: *Problem Solving Strategies*, Springer, 1998.
[2] Filip Hlásek: *Trojúhelníkové nerovnosti*, Domašov, 2012.
[3] Claudi Alsina, Roger B. Nelsen: *A Visual Proof of the Erdos-Mordell Inequality*, *http://forumgeom.fau.edu/FG2007volume7/FG200711.pdf*