# Geometrické úlohy

*Filip Jaroš*

Na přednášce se budu zabývat takovými geometrickými úlohami, které se dají elegantně řešit pomocí shodností. Typické řešení bude takové, že otočím (ze záhadných důvodů) nějaký trojúhelník, pospojuji nějaké body a najednou budu znát řešení. S podobnými triky lze často uspět na olympiádách a při řešení zvlášť vypečených úloh v korespondenčních seminářích. Nebudu se tvářit, že předvedené postupy budou přirozené, je třeba se na ně dívat spíše jako na finty, které patří k matematickému folklóru. Rozlouskneme určitě následujících 5 problémků, možná přijde i kouzeln . . . ý příkládek (heslo IMO). Nejlepší bude, když se nejdříve v klidu sami pokusíte o řešení – pak vám přednáška dá více než pouhý souhlas, že to, co říkám, bude nejspíš pravda.

**1. úloha.** (na zahřátí, z matematické bible) Nechť rovnoběžník $AXYZ$ je vepsaný danému trojúhelníku $ABC$ tak, že body $X$, $Y$, $Z$ leží postupně na stranách $AB$, $BC$, $CA$. Najděte rovnoběžník $AXYZ$ s největším možným obsahem.

**2. úloha.** (kterou jste už možná viděli) Nechť $ABC$ je ostroúhlý trojúhelník. Najděte na jeho stranách $AB$, $BC$, $CA$ postupně body $X$, $Y$, $Z$ tak, aby trojúhelník $XYZ$ měl minimální možný obvod.

**3. úloha.** (ze 17. století) Mějme v rovině body $A$, $B$, $C$ neležící na přímce. Najděte takový bod $X$ této roviny, že součet $|AX| + |BX| + |CX|$ je minimální.

**4. úloha.** (nad níž jsem se zapotil) Nechť $ABCD$ je čtverec , na jehož stranách $BC$ a $CD$ leží postupně body $M$ a $K$ tak, že $|MC| = |KD|$. Průsečík úseček $BK$ a $DM$ označme $P$. Dokažte, že přímky $AP$ a $MK$ svírají pravý úhel.

**5. úloha.** (tu budu kreslit půl hodiny) Nechť $ABC$ je ostroúhlý trojúhelník. Připišme nad jeho strany rovnostranné trojúhelníky $ABD$, $BCE$, $CAF$. Dokažte, že přímky $CD$, $AE$ a $BF$ se protínají v jednom bodě.