Generujúce funkcie

PETER „πTR“ KORCSOK

ABSTRAKT. Generujúce funkcie sú silný nástroj, ktorý nám pomáha pri práci s postupnosťami – miesto s nekonečne veľa čísel totiž pracujeme len s jednou funkciou. Obsahom tejto prednášky je predstaviť základné operácie, ktoré môžeme s generujúcimi funkciami vykonávať. Tiež si ukážeme niektoré z aplikácií generujúcich funkcií, ako napríklad overovanie rôznych identít alebo hľadanie explicitných vzorcov pre rekurentné postupnosti.

Citát. Generujúca funkcia je šnúra, na ktorú povesíme postupnosť čísel.
(Herbert Saul Wilf, *Generatingfunctionology*)

Predstavme si, že sme na ulici našli úlohu, ktorej výsledkom má byť postupnosť čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Trápime sa s ňou pomerne dlho, ale nakoniec z tohto boja vyjdeme ako víťazi. Ako ale vyzerá výsledok?

V ideálnom prípade dostaneme priamo predpis pre n-tý člen, napr. $a_n = n^3 + 5$, ktorý platí pre všetky $n = 0, 1, 2, \ldots$ Toto je ale častokrát len naše prianie a skutočný svet býva oveľa krutejší. Ako jeden príklad za všetky stačí postupnosť všetkých prvočísel.

Vtedy nám môžu výrazne pomôcť generujúce funkcie – stačí, ak nájdeme „nekonečný“ polynóm, ktorého koeficienty tvoria práve hľadanú postupnosť.

Ale skutočne stačí nejaká takáto funkcia? Ako z nej potom získame jednotlivé čísla? A hlavne: ako sa k tej správnej funkcii dopracujeme? To bude práve obsahom tejto prednášky.

Tri... Dva... Jedna... Začíname

Pozrime sa na túto našu zbraň trochu formálnejšie:

Definícia. Majme danú postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ reálnych čísel. Potom funkciu definovanú predpisom

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots ,$$

kde x je reálna premenná[1], budeme nazývať *generujúcou funkciou*[2] tejto postupnosti.

Nesmieme ale zabudnúť na to, že nás zaujímajú jednotlivé členy postupnosti, preto pod označením $[x^n]A(x)$ budeme rozumieť koeficient pri x^n v „polynóme“ $A(x)$, teda číslo a_n.

Poznámka. V niektorých prípadoch sa nám bude viac hodiť používať *exponenciálnu generujúcu funkciu*

$$A_e(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i x^i}{i!}.$$

Ako si ale tieto nekonečné sumy predstavovať? Pokiaľ si sa už stretol(a) s limitami, môžem rovno prezradiť, že

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Voľne preložené, hľadáme číslo, ku ktorému sa konečné súčty „blížia“. Asi Ťa už napadlo, že takéto číslo nemusí vždy existovať. Našťastie platí nasledujúce tvrdenie, na jeho dôkaz ale potrebujeme znalosti z matematickej analýzy, preto ho radšej vynecháme. Rovnako sa uspokojíme s tým, že predpoklady platia a nebudeme ich formálne overovať.

Tvrdenie. *Nech $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je postupnosť reálnych čísel a nech existuje číslo K, že pre každé $n \geq 1$ platí $|a_n| \leq K^n$. Potom pre každé $x \in \left(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right)$ rad*

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

konverguje. Navyše, funkcia $A(x)$ má v bode 0 všetky derivácie a pre každé $n = 0, 1, 2, \dots$ platí

$$[x^n]A(x) = a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!},$$

kde $a^{(n)}(0)$ označuje n-tú deriváciu funkcie $A(x)$ v bode 0.

Naša prvá generujúca funkcia

Na hodine matematiky si sa už asi stretol(a) s geometrickým radom

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n,$$

[1]Úplne správne by sme mali používať komplexnú premennú, vo väčšine príkladov si ale vystačíme s reálnou.

[2]V niektorých, najmä českých, zdrojoch sa používa označenie *vytvorujúca funkcia*.

a teda už možno vieš, že pre $x \neq 1$ sa tento súčet rovná

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Dokázať sa to dá napríklad roznásobením výrazu $(1 - x)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right)$. Teraz by sme radi našli podobný vzorec aj pre nekonečný súčet.

Príklad 1. Ako vyzerá generujúca funkcia pre postupnosť $(1, 1, 1, \ldots)$? Podarí sa Ti nájsť aj exponenciálnu generujúcu funkciu tejto postupnosti?

Operácie s funkciami

Keď už máme aspoň jednu generujúcu funkciu, pozrime sa, aké operácie máme povolené na vytváranie ďalších funkcií. Vždy budeme predpokladať, že $A(x)$ generuje postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ a $B(x)$ postupnosť $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$.

(1) Súčet funkcií $A(x) + B(x)$ potom generuje postupnosť

$$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots).$$

(2) Nech α je ľubovoľné reálne číslo. Potom funkcia $\alpha A(x)$ generuje postupnosť

$$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots).$$

(3) Pre ľubovoľné prirodzené číslo n generuje funkcia $x^n A(x)$ postupnosť

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n\times}, a_0, a_1, a_2, \ldots),$$

teda postupnosť posunutú o n miest doprava.

(4) Podobne vieme posúvať aj doľava, len nesmieme zabudnúť na počiatočné členy: generujúcu funkciu pre $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$ dostaneme vzťahom

$$\frac{A(x) - \left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}\right)}{x^n}.$$

(5) Pokiaľ $b_0 = 0$, môžeme si dovoliť dosadiť $B(x)$ miesto x do $A(x)$:

$$A(B(x)) = a_0 + a_1 B(x) + a_2 B(x) B(x) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i B^i(x).$$

Najčastejšie ale aj tak budeme dosadzovať polynómy $B(x) = \alpha x$ pre postupnosť $(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots)$ alebo $B(x) = x^n$ pre vloženie $n - 1$ núl medzi každé po sebe idúce členy postupnosti.

(6) Pomerne často sa používajú dve operácie z matematickej analýzy – derivácia a integrál. Deriváciou funkcie $A(x)$ dostaneme funkciu $A'(x)$, ktorá generuje postupnosť $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$.

Naopak zintegrovaním funkcie $A(x)$ dostaneme funkciu $\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t$ generujúcu postupnosť $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \dots)$.

Pokiaľ si sa ešte s deriváciami a integrálmi nestretol(a), nezúfaj. Základy potrebné k týmto príkladom sa naučíme na prednáške a zložitejším použitiam sa vyhneme veľkým oblúkom.

(7) Asi najzložitejšou operáciou je násobenie funkcií:

$$\begin{aligned}
A(x)B(x) &= a_0 b_0 \\
&+ (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x \\
&+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\, x^2 \\
&\vdots \\
&+ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)\, x^n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dostávame teda funkciu $C(x) = A(x)B(x)$ a jej odpovedajúcu postupnosť $(c_0, c_1, c_2, \dots)$, kde $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ – túto postupnosť často odborne nazývame *konvolúcia* postupností $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ a $(b_0, b_1, b_2, \dots)$.

Trochu oddychu od teórie

Využitie týchto operácií si teraz trochu vyskúšame.

Príklad 2. Nájdi generujúcu funkciu pre nasledujúce postupnosti.

(i) $(2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots)$
(ii) $(1, 0, 3, 0, 9, 0, 27, \dots)$
(iii) $(2015, 34, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$
(iv) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$
(v) $(1, 1, -2, 2, 4, 4, -8, 8, 16, 16, -32, 32, \dots)$
(vi) $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots)$

Príklad 3. Aké postupnosti generujú nasledujúce funkcie?

(i) $\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$
(ii) $\dfrac{1}{1+2x}$
(iii) $\dfrac{1}{1-x^2}$

(iv) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

(v) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$

No dobre, ale čo s tým?

Už sme si ukázali, čo sú to generujúce funkcie a ako ich vieme rôzne kombinovať. Stále ale nevieme, kde a ako by sme ich vedeli použiť.

Skutočne sa to rovná?

Opäť je dosť pravdepodobné, že nasledujúcu vetu už poznáš zo školy.

Veta. (Binomická) *Pre každé prirodzené číslo n a reálne číslo x platí*

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

Inými slovami sa dá povedať, že funkcia $(1+x)^n$ generuje postupnosť

$$\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots\right),$$

kde $\binom{n}{k} = 0$ pre každé $k > n$.

Skúsme si dokázať dve rovnosti, kde nám táto veta príde vhod.

Príklad 4. Ukáž, že nasledujúce rovnosti platia.

(i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$

Kombinačné číslo a aj celú binomickú vetu ale vieme zovšeobecniť aj pre reálne hodnoty.

Veta. (Zovšeobecnená binomická) *Pre ľubovoľné reálne číslo r a nezáporné celé číslo k definujeme kombinačné číslo $\binom{r}{k}$ predpisom*

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!},$$

špeciálne $\binom{r}{0} = 1$. Potom funkcia $(1+x)^r$ generuje postupnosť

$$\left(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots\right).$$

Opäť si to rovno skúsime aplikovať.

Príklad 5. Urči nasledujúce koeficienty.

(i) $[x^{15}]\left(x^2+x^3+x^4+\cdots\right)^4$
(ii) $[x^{14}]\left(x^3+x^5+x^7+\cdots\right)^2$
(iii) $[x^4]\,(2+3x)^5\sqrt{1-x}$
(iv) $[x^3]\left(1-x+2x^2\right)^9$

Hľadáme presný vzorec pre rekurenciu

Druhou veľkou skupinou aplikácií je práve hľadanie presného vzorca pre n-tý člen postupnosti. Základná myšlienka tohto výpočtu je pomerne jednoduchá, v mnohých prípadoch nám ale zaberie trochu viac času, prípadne bude vyžadovať zručnosti z matematickej analýzy.

Čo teda robiť s rekurentne zadanou postupnosťou? V prvom rade musíme mať vzorec, ktorý platí pre každé n – pre tieto účely predpokladáme, že $a_{-1}=a_{-2}=\cdots=0$. Občas si musíme pomôcť výrazmi typu $[n=k]$, ktorý nám „dosadí“ hodnotu 1 práve vtedy, keď je daná podmienka splnená, a 0 vo všetkých ostatných prípadoch.

Následne môžeme obe strany rekurencie vynásobiť x^n a rovno tieto rovnosti pre všetky možné hodnoty n posčítame. Po prípadných kozmetických úpravách dostaneme priamo rovnicu s generujúcou funkciou $A(x)$ v roli „neznámej“, ktorú vyriešime. Tento krok nám občas môže spôsobiť problémy a niekedy dokonca vedie na riešenie diferenciálnych rovníc.

Posledným krokom je už len zistiť hodnotu koeficientu $[x^n]A(x)$ – pre malé hodnoty n môžeme využiť tvrdenie zo začiatku, ale väčšinou sa chceme vyhnúť mnohonásobnému derivovaniu. Využijeme teda rozklad na takzvané *parciálne zlomky*, ktoré nám už dajú priamo hľadaný predpis.

Pokiaľ si predchádzajúcich pár riadkov nepochopil(a), nemusíš sa báť, na prednáške to prejdeme celé na príklade a zistíš, že to nie je až tak strašné.

Príklad 6. Fibonacciho postupnosť je definovaná predpisom $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ pre $n\geq 2$ a začiatkom $f_0=0$, $f_1=1$. Nájdi explicitný vzorec pre číslo f_n.

Pozor… Záplava príkladov!

Príklad 7. Koľkými spôsobmi sa dá pomocou jedno-, dvoj- a päťkorunových mincí zaplatiť presne 23 korún? Uváž možnosti:

(i) Máme len 7 jednokorunových, 6 dvojkorunových a 4 päťkorunové mince.
(ii) Počty mincí nie sú obmedzené.

Príklad 8. V cukrárni predávajú 3 druhy zmrzliny – citrónovú, čokoládovú a vanilkovú. Koľkými spôsobmi je možné nakúpiť 12 zmrzlín, pokiaľ z každého druhu chceme aspoň dve, ale z čokoládovej sú k dispozícii posledné tri porcie?

Príklad 9. V krabici máme 30 červených, 40 modrých a 50 bielych loptičiek, pričom loptičky rovnakej farby sú od seba nerozoznateľné. Koľkými spôsobmi vieme vybrať práve 70 loptičiek?

Príklad 10. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode 12 klasickými kockami padne súčet 30?

Príklad 11. Majme všetky nezáporné celé čísla rozdelené v konečne mnoho (aspoň dvoch) aritmetických postupnostiach, tak, že každé číslo v práve jednej z nich. Dokáž, že potom vždy nájdeme nejaké dve, ktoré majú rovnakú diferenciu.

Príklad 12. Koľko existuje korektných uzátvorkovaní využívajúcich práve n párov zátvoriek?

Príklad 13. Koľkými spôsobmi môžeme vyjsť schodisko s n schodmi, pokiaľ pri každom kroku prejdeme jeden alebo dva schody?

Príklad 14. Koľkými spôsobmi vieme rozmiestniť čísla $1, \ldots, 2n$ do obdĺžnika $2 \times n$ tak, aby čísla rástli zľava doprava a zhora nadol?

1	2	4	5	8
3	6	7	9	10

Príklad 15. Koľko existuje rôznych triangulácií pravidelného n-uholníka?

Príklad 16. Lístok do divadla stojí presne 50 korún. Jedného večera prišlo $2n$ divákov, pričom n z nich malo päťdesiatkorunu a zvyšných n stokorunu. Pretože pokladňu tesne pred otvorením vykradli, nie sú v nej na začiatku žiadne peniaze. Aká je pravdepodobnosť, že keď sa návštevníci zoradia pred pokladňou náhodne, tak pokladníčka bude môcť každému z nich vydať?

Príklad 17. Majme nekonečné náhodné slovo využívajúce 26-znakovú abecedu. Spočítaj „priemernú vzdialenosť“ prvého výskytu podslov $BABA$ a $JAGA$ od začiatku slova. Ktoré z nich má väčšiu pravdepodobnosť na skorší výskyt?

Príklad 18. Pre dané prirodzené číslo n označme a_n počet spôsobov, ktorým ho vieme zapísať ako súčet nepárnych čísel (môžu sa aj opakovať), a b_n počet spôsobov, ktorým ho vieme zapísať ako súčet navzájom rôznych celých čísel. Dokáž, že $a_n = b_n$.

Príklad 19. Koľko existuje postupností písmen A, B, C a D dĺžky n, v ktorých A a B nikdy nesusedia?

Literatúra a zdroje

[1] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum, 2009.

[2] Herbert Saul Wilf: *Generatingfunctionology*, Academic Press, 1994.
[3] Ronald Lewis Graham, Donald Ervin Knuth, Oren Patashnik: *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1994.
[4] László Lovász: *Combinatorial Problems and Exercises*, AMS Chelsea, 2007.
[5] Martin Tancer: *Kombinatorika*, seriál 27. ročníka MKS.
[6] Knižnica MKS, *https://mks.mff.cuni.cz/library/*.