Generující funkce

Robert Šámal — 28.února 2001

K čemu jsou?

Generující funkce jsou velice mocný *nástroj*. Tento nástroj nám umožní (když se s ním naučíme zacházet) řešit bez obtížného přemýšlení úlohy, které by nám jinak daly pořádně zabrat, nebo bychom je ani nevyřešili. (To samozřejmě neznamená, že už nebudeme muset přemýšlet, budeme prostě řešit složitější problémy ...) Zhruba řečeno jde o to, že místo posloupnosti nějakých čísel budeme zkoumat nějakou funkci k té posloupnosti přiřazenou. Vlastnosti té posloupnosti se nějak „přeloží“ do vlastností té funkce. Po prozkoumání této funkce pak můžeme něco říci i o původní posloupnosti.

Základní pojmy

Definice. Mějme nějakou posloupnost čísel $g_0, g_1, g_2, \ldots$ (občas budeme předpokládat, že máme definovány i členy se zápornými indexy a platí $g_{-1} = g_{-2} = \cdots = 0$). *Generující funkcí* (též *vytvořující funkcí*) této posloupnosti nazveme funkci

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \cdots$$

Symbolem [výrok] rozumíme číslo 1, pokud uvedený výrok platí a číslo 0, pokud neplatí. Např. $[0 \le n \le 2]$ je 1 pro n mezi 0 a 2, 0 jinak.

Dále symbolem $[x^n]G(x)$ (kde $G(x)$ je jako výše) rozumíme číslo g_n.

Poznámka. Poznamenejme, že místo výše uvedené, tzv. obyčejné generující funkce, je někdy vhodnější použít *exponenciální generující funkci* $\hat{G}(x) = \sum_n g_n x^n / n!$, případně *Dirichletovu* generující funkci* $\tilde{G}(x) = \sum_n g_n / n^x$.

Můžete se zeptat, co znamená ten nekonečný součet. V přednášce z matematické analýzy byste se dozvěděli, že je to jakási limita částečných součtů, že občas součet neexistuje atd. Ne tak zde — ten součet pro nás bude jenom vzoreček, se kterým ovšem budeme manipulovat, jako by to skutečný součet byl. Vpodstatě všechny operace, které můžete chtít, jdou provádět i s takovými „nesečtenými vzorečky“*, ale vyhneme se úvahám, zda daný součet má smysl. Navíc budeme moci pracovat např. i s řadou $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$, což v analýze nejde (protože nemá smysl pro žádné nenulové x).

* *Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), německý matematik, takových funkcí hojně využíval.*

* Učeně se jim říká formální mocninné řady.

Co tedy můžeme s generujícími funkcemi provádět za operace? Můžeme je sčítat, odčítat, násobit — vše zcela přirozeně „jediným možným způsobem“, stejně jako by to byly třeba polynomy. Můžeme je také derivovat a integrovat (opět jako polynomy), řešit rovnice pro tyto funkce (opět „přirozeným způsobem“), za určitých okolností dosazovat do sebe, dělit jimi. Přehled některých operací pro funkce a jejich vlivu na odpovídající posloupnosti najdete níže.

Příklad použití

Uveďme zde základní způsob použití generujících funkcí.

1. krok. Sestavíme (případně dostaneme zadanou) rekurentní formulku pro neznámou posloupnost $\{f_n\}$. Budou-li například f_n Fibonacciho° čísla — velice často se vyskytující typ čísel, jeden z jejich významů je počet králíků, jestliže se králíci množí podle vhodného pravidla — bude ona formule

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 2), \qquad\qquad f_0 = 0, \quad f_1 = 1.$$

2. krok. Tuto formuli upravíme tak, aby platila pro všechna n (přitom předpokládáme, že členy se záporným indexem jsou nulové). S využitím symbolu $[\ldots]$ to můžeme udělat takto:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + [n = 1].$$

3. krok. Vynásobíme x^n a sečteme přes všechna n. Označíme-li $F(x)$ příslušnou generující funkci, dostaneme

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_n f_n x^n = x \sum_n f_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_n f_{n-2} x^{n-2} + \sum_n [n = 1] x^n \\ &= xF(x) + x^2 F(x) + x \end{aligned}$$

4. krok. Získanou rovnici pro $F(x)$ vyřešíme. To je zde snadné: $F(x) = x/(1 - x - x^2)$.

5. krok. Ze získaného řešení vyčteme koeficient u x^n. I to je zde snadné. Nejprve rozložíme jmenovatel v $F(x)$ na součin dvou činitelů; zjistíme, že $1 - x - x^2 = (1 - \varphi x)(1 - \hat{\varphi} x)$, kde $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ a $\hat{\varphi} = (1 - \sqrt{5})/2$. Dále rozložíme $F(x)$ na tzv. parciální zlomky a upravíme podle jednoho ze vzorců v tabulce:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \hat{\varphi} x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \hat{\varphi}^n \right) x^n,$$

$$\text{čili} \qquad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \hat{\varphi}^n \right).$$

° Leonardo Fibonacci roku 1202 publikoval spis o počítání králíků.

Přehled užitečných faktů

Jednoduché operace s generujícími funkcemi
$\alpha F(x) + \beta G(x) = \sum_n (\alpha f_n + \beta g_n) x^n$
$x^m F(x) = \sum_n f_{n-m} x^n, \quad m \geq 0$
$\Big(F(x) - P(x)\Big)/x^m = \sum_{n \geq 0} f_{n+m} x^n, \quad m \geq 0$
$F(cx) = \sum_n c^n f_n x^n$
$F'(x) = \sum_n (n+1) f_{n+1} x^n$
$xF'(x) = \sum_n n f_n x^n$
$\int_0^x F(t)\mathrm{d}t = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} f_{n-1} x^n$
$F(x)G(x) = \sum_n \Big(\sum_k f_k g_{n-k}\Big) x^n$
$\frac{1}{1-x} F(x) = \sum_n \Big(\sum_{k \leq n} f_k\Big) x^n$

Přitom $P(x)$ je vhodný polynom (stupně $m-1$), konkrétně $P(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots + g_{m-1} x^{m-1}$.

Užitečné vzorečky.

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}$$

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

Jednoduché posloupnosti a jejich generující funkce		
posloupnost	generující funkce	její uzavřený tvar
$(1,0,0,0,0,0,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}[n=0]\ x^n$	1
$(0,\ldots,0,1,0,0,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}[n=m]\ x^n$	x^m
$(1,1,1,1,1,1,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}x^n$	$\frac{1}{1-x}$
$(1,-1,1,-1,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$	$\frac{1}{1+x}$
$(1,0,1,0,1,0,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}[2\mid n]\ x^n$	$\frac{1}{1-x^2}$
$(1,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,1,0,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}[m\mid n]\ x^n$	$\frac{1}{1-x^m}$
$(1,2,3,4,5,6,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$	$\frac{1}{(1-x)^2}$
$(1,2,4,8,16,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}2^n x^n$	$\frac{1}{1-2x}$
$(1,c,c^2,c^3,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}c^n x^n$	$\frac{1}{1-cx}$
$(1,4,6,4,1,0,0,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}\binom{4}{n}x^n$	$(1+x)^4$
$(1,c,\binom{c}{2},\binom{c}{3},\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}\binom{c}{n}x^n$	$(1+x)^c$
$(1,c,\binom{c+1}{2},\binom{c+2}{3},\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n}x^n$	$\frac{1}{(1-x)^c}$
$(1,\binom{m+1}{m},\binom{m+2}{m},\binom{m+3}{m},\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}\binom{m+n}{m}x^n$	$\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$
$(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots)$	$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}x^n$	$\log\frac{1}{1-x}$
$(0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\ldots)$	$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$	$\log(1+x)$
$(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\frac{1}{120},\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n$	e^x

Příklady

1. příklad$^-$ Každé číslo lze právě jedním způsobem zapsat jako součet po dvou různých mocnin dvojky (tj. zapsat v binárním zápisu).

2. příklad Navrhněte dvojici kostek (krychlí, na jejichž každé stěně je napsáno kladné celé číslo) tak, aby hod těmito dvěma kostkami byl ekvivalentní hodu normálními dvěma kostkami (tj. součet 2 padne v jednom z 36 případů, součet 3 ve dvou, ...), ale tyto kostky přitom nebyly normální. (Zkuste též najít všechna řešení.)

3. příklad Rozdělte $\mathbb{N}_0$ na dvě množiny A a B tak, aby každé **kladné** přirozené číslo šlo vyjádřit stejným počtem způsobů jako součet $a + a'$, kde $a < a'$ a $a, a' \in A$ i jako součet $b + b'$, kde $b < b'$ a $b, b' \in B$.

4. příklad Je možné rozdělit přirozená čísla na několik (alespoň dvě) aritmetické posloupnosti, které mají po dvou různé diference?

5. příklad Existuje nekonečná množina přirozených čísel taková, že všechna velká přirozená čísla jsou vyjádřitelná jako součet dvou čísel z naší množiny stejným počtem způsobů?

6. příklad* Čísla 0, 2, 5, 6 mají zajímavou vlastnost: jejich (kladné) rozdíly jsou přesně čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, každé právě jednou. Naleznete větší počet čísel s takovou vlastností?

7. příklad Počet rozkladů přirozeného čísla na součet lichých přirozených čísel je stejný jako počet rozkladů na součet po dvou různých přirozených čísel.

8. příklad* Baktérie se s pravděpodobností p rozdělí na dvě, jinak zanikne. Jaká je pravděpodobnost, že z jedné baktérie vznikne nesmrtelná kolonie?

9. příklad⁻ V cukrárně prodávají tři druhy zákusků — větrníky, kremrole a laskonky. Kolika způsoby lze koupit 12 zákusků tak, aby se od každého druhu koupily alespoň 2 kousky a přitom nejvýše 3 kremrole?

10. příklad⁻ Kolika způsoby lze rozdělit 10 stejných balónků dvěma chlapečkům a dvěma holčičkám, má-li každý chlapeček dostat aspoň jeden balónek a každá holčička aspoň dva, nejvíce pět?

11. příklad Sečtěte
(a) $\sum_{i=0}^{n} k \binom{n}{k}$
(b) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$
(c) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}^2$

12. příklad V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky téže barvy se od sebe nepoznají. Kolik je různých možností, jak lze z takové krabice vybrat 70 míčků?

13. příklad⁻ Určete $[x^{15}](x^2+x^3+x^4+\cdots)^4$, $[x^{50}](x^7+x^8+x^9+\cdots)^6$, $[x^5](1-2x)^{-3}$, $[x^4]\sqrt[3]{1+x}$, $[x^3](2+x)^{3/2}/(1-x)$, $[x^4](2+3x)^5\sqrt{1-x}$, $[x^3](1-x+2x^2)^9$.

14. příklad⁻ Najděte uzavřenou formuli pro generující funkci následujících posloupností
(a) 0, 0, 0, 0, −6, 6, −6, 6, −6, ...
(b) 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...
(c) 1, 2, 1, 4, 1, 8, ...
(d) 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, ...

15. příklad⁻ Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 12 hracími kostkami padne součet 30?

16. příklad Označme a_n počet rozkladů čísla n na součet k celých nezáporných (varianta: kladných) čísel, přičemž změnu pořadí bereme jako jiný rozklad. Najděte generující funkci pro posloupnost $(a_0, a_1, \ldots)$ a její pomocí i vzorec pro a_n.

17. příklad Kolika způsoby lze zaplatit n korun pomocí korunových, dvoukorunových a pětikorunových mincí?

18. příklad Kolika způsoby lze pokrýt obdélník $2 \times n$ (varianta: $3 \times n$) dominy 2×1?

19. příklad Kolik existuje slov délky n složených z písmen a, b, v nichž nejsou nikde dvě a-čka vedle sebe?

20. příklad Kolik existuje slov délky n složených z písmen a, b, c, d, v nichž není nikde vedle sebe a a b?

21. příklad Rozdělme pravidelný n-úhelník na trojúhelníky pomocí $n-3$ neprotínajících se úhlopříček. Kolika způsoby tak můžeme učinit?

22. příklad** (Věta o pětiúhelníkových číslech) Pokud $n \neq (3k^2 \pm k)/2$, tak počet rozkladů n na součet lichého počtu různých čísel je týž jako počet rozkladů n na součet sudého počtu různých čísel.

Literatura

[1] František Zítek: Vytvořující funkce, edice Škola mladých matematiků, sv. číslo 29, Mladá Fronta 1989

[2] Martin Klazar: Kombinatorické počítání, KAM-DIMATIA Series, 1999, (`http://www.ms.mff.cuni.cz/acad/kam/klazar/kpoc99.ps.gz`)

[3] Graham, Knuth, Patashnik: Concrete Mathematics, Addison-Wesley

[4] `http://www.research.att.com/ njas/sequences/`