Generující funkce

Robert Šámal

K čemu jsou?

Generující funkce jsou velice mocný *nástroj*. Tento nástroj nám umožní (když se s ním naučíme zacházet) řešit bez obtížného přemýšlení úlohy, které by nám jinak daly pořádně zabrat, nebo bychom je ani nevyřešili. (To samozřejmě neznamená, že už nebudeme muset přemýšlet, budeme prostě řešit složitější problémy ...) Zhruba řečeno jde o to, že místo posloupnosti nějakých čísel budeme zkoumat nějakou funkci k té posloupnosti přiřazenou. Vlastnosti té posloupnosti se nějak „přeloží“ do vlastností té funkce. Po prozkoumání této funkce pak můžeme něco říci i o původní posloupnosti.

Na této přednášce se samozřejmě nedostaneme ke všem aplikacím generujících funcí, dokonce ani ke všem typům aplikací. Předvedeme si, jak pomocí generujících funkcí řešit lineární rekurentní rovnice (např. pro Fibonacciho čísla nebo pro „chobotničku“ z letošního ročníku semináře), zjistit počet stromů (tj. to, co jiným způsobem dělala na své přednášce Páťa), zkoumat rozklady čísla na součet jiných čísel (8. příklad z 5. série) atd. atd.

Pozor, začíná matematika

Definice. *Mějme nějakou posloupnost čísel $g_0, g_1, g_2, \ldots$ (občas budeme předpokládat, že máme definovány i členy se zápornými indexy a platí $g_{-1} = g_{-2} = \cdots = 0$). Generující funkcí (též vytvořující funkcí) této posloupnosti nazveme funkci*

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \cdots$$

Definice. *Symbolem [výrok] rozumíme číslo 1, pokud uvedený výrok platí a číslo 0, pokud neplatí. Např. $[0 \le n \le 2]$ je 1 pro n mezi 0 a 2, 0 jinak.*

Dále symbolem $[x^n]G(x)$ (kde $G(x)$ je jako výše) rozumíme číslo g_n.

Poznámka. Poznamenejme, že místo výše uvedené, tzv. obyčejné generující funkce, je někdy vhodnější použít *exponenciální generující funkci* $\hat{G}(x) =$

$\sum_n g_n x^n/n!$, případně *Dirichletovu*[2] *generující funkci* $\tilde{G}(x) = \sum_n g_n/n^x$.

Můžete se zeptat, co znamená ten nekonečný součet. V přednášce z matematické analýzy byste se dozvěděli, že je to jakási limita částečných součtů, že občas součet neexistuje atd. Ne tak zde — ten součet pro nás bude jenom vzoreček, se kterým ovšem budeme manipulovat, jako by to skutečný součet byl. Vpodstatě všechny operace, které můžete chtít, jdou provádět i s takovými „nesečtenými vzorečky“[3], ale vyhneme se úvahám, zda daný součet má smysl. Navíc budeme moci pracovat např. i s řadou $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$, což v analýze nejde (protože nemá smysl pro žádné nenulové x).

Co tedy můžeme s generujícími funkcemi provádět za operace? Můžeme je sčítat, odčítat, násobit — vše zcela přirozeně „jediným možným způsobem“, stejně jako by to byly třeba polynomy. Můžeme je také derivovat a integrovat (opět jako polynomy), řešit rovnice pro tyto funkce (opět „přirozeným způsobem“), za určitých okolností dosazovat do sebe, dělit jimi. Přehled některých operací pro funkce a jejich vlivu na odpovídající posloupnosti najdete níže.

Příklad použití

Uveďme zde základní způsob použití generujících funkcí.

1. krok. Sestavíme (případně dostaneme zadanou) rekurentní formulku pro neznámou posloupnost $\{f_n\}$. Budou-li například f_n Fibonacciho[4]čísla — velice často se vyskytující typ čísel, jeden z jejich významů je počet králíků, jestliže se králíci množí podle vhodného pravidla — bude ona formule

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 2), \qquad\qquad f_0 = 0, \quad f_1 = 1.$$

2. krok. Tuto formuli upravíme tak, aby platila pro všechna n (přitom předpokládáme, že členy se záporným indexem jsou nulové). S využitím symbolu $[\dots]$ to můžeme udělat takto:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + [n = 1].$$

[2]Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), německý matematik, takových funkcí hojně využíval.

[3]Učeně se jim říká formální mocninné řady.

[4]Leonardo Fibonacci roku 1202 publikoval spis o počítání králíků.

3. krok. Vynásobíme x^n a sečteme přes všechna n. Označíme-li $F(x)$ příslušnou generující funkci, dostaneme

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_n f_n x^n = x \sum_n f_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_n f_{n-2} x^{n-2} + \sum_n [n=1] x^n \\ &= xF(x) + x^2 F(x) + x \end{aligned}$$

4. krok. Získanou rovnici pro $F(x)$ vyřešíme. To je zde snadné: $F(x) = x/(1-x-x^2)$.
5. krok. Ze získaného řešení vyčteme koeficient u x^n. I to je zde snadné. Nejprve rozložíme jmenovatel v $F(x)$ na součin dvou činitelů; zjistíme, že $1 - x - x^2 = (1-\varphi x)(1-\hat{\varphi} x)$, kde $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ a $\hat{\varphi} = (1-\sqrt{5})/2$. Dále rozložíme $F(x)$ na tzv. parciální zlomky a upravíme podle jednoho ze vzorců v tabulce:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1-\hat{\varphi} x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \hat{\varphi}^n \right) x^n,$$

$$\text{čili} \qquad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \hat{\varphi}^n \right).$$

Přehled užitečných faktů o generujících funkcích

Jednoduché operace s generujícími funkcemi
$\alpha F(x) + \beta G(x) = \sum_n (\alpha f_n + \beta g_n) x^n$
$x^m F(x) = \sum_n f_{n-m} x^n, \quad m \geq 0$
$\Big(F(x) - P(x)\Big)/x^m = \sum_{n \geq 0} f_{n+m} x^n, \quad m \geq 0$
$F(cx) = \sum_n c^n f_n x^n$
$F'(x) = \sum_n (n+1) f_{n+1} x^n$
$xF'(x) = \sum_n n f_n x^n$
$\int_0^x F(t)\mathrm{d}t = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} f_{n-1} x^n$
$F(x)G(x) = \sum_n \Big(\sum_k f_k g_{n-k} \Big) x^n$
$\frac{1}{1-x} F(x) = \sum_n \Big(\sum_{k \leq n} f_k \Big) x^n$

Přitom $P(x)$ je vhodný polynom (stupně $m-1$), konkrétně $P(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots + g_{m-1} x^{m-1}$.

Jednoduché posloupnosti a jejich generující funkce		
posloupnost	generující funkce	její uzavřený tvar
$(1,0,0,0,0,0,\dots)$	$\sum_{n\geq 0} [n=0]\, x^n$	1
$(0,\dots,0,1,0,0,\dots)$	$\sum_{n\geq 0} [n=m]\, x^n$	x^m
$(1,1,1,1,1,1,\dots)$	$\sum_{n\geq 0} x^n$	$\frac{1}{1-x}$
$(1,-1,1,-1,\dots)$	$\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$	$\frac{1}{1+x}$
$(1,0,1,0,1,0,\dots)$	$\sum_{n\geq 0} [2 \mid n]\, x^n$	$\frac{1}{1-x^2}$
$(1,0,\dots,0,1,0,\dots,0,1,0,\dots)$	$\sum_{n\geq 0} [m \mid n]\, x^n$	$\frac{1}{1-x^m}$
$(1,2,3,4,5,6,\dots)$	$\sum_{n\geq 0} (n+1)x^n$	$\frac{1}{(1-x)^2}$
$(1,2,4,8,16,\dots)$	$\sum_{n\geq 0} 2^n x^n$	$\frac{1}{1-2x}$
$(1,c,c^2,c^3,\dots)$	$\sum_{n\geq 0} c^n x^n$	$\frac{1}{1-cx}$
$(1,4,6,4,1,0,0,\dots)$	$\sum_{n\geq 0} \binom{4}{n} x^n$	$(1+x)^4$
$(1,c,\binom{c}{2},\binom{c}{3},\dots)$	$\sum_{n\geq 0} \binom{c}{n} x^n$	$(1+x)^c$
$(1,c,\binom{c+1}{2},\binom{c+2}{3},\dots)$	$\sum_{n\geq 0} \binom{c+n-1}{n} x^n$	$\frac{1}{(1-x)^c}$
$(1,\binom{m+1}{m},\binom{m+2}{m},\binom{m+3}{m},\dots)$	$\sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{m} x^n$	$\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$
$(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots)$	$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$	$\log \frac{1}{1-x}$
$(0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\dots)$	$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$\log(1+x)$
$(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\frac{1}{120},\dots)$	$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n$	e^x