Analytická geometrie v Gaussově rovině

Libor Barto

Základní poznatky

Gaussova rovina je rovina s pravoúhlým souřadnicovým systémem. Každému komplexnímu číslu $z = a + bi$ přiřadíme v Gaussově rovině bod $[a, b]$ a naopak. Body Gaussovy roviny ztotožňujeme s komplexními čísly. Často je výhodné chápat komplexní čísla (body Gaussovy roviny) jako vektory. Číslu a odpovídá vektor délky $|a|$ se směrem polopřímky $\overrightarrow{0a}$.

Některé poznatky o komplexních číslech

(1) $\mathrm{Re}(a) = \frac{a+\bar{a}}{2}$, $\quad \mathrm{Im}(a) = \frac{a-\bar{a}}{2}$, $\quad a\bar{a} = |a|^2$
(2) $a \perp b \Leftrightarrow \mathrm{Re}(a\bar{b}) = 0$, $\quad a \| b \Leftrightarrow \mathrm{Im}(a\bar{b}) = 0$

Přímka

(1) Směrový vektor úsečky určené body z_1 a z_2 je $z_2 - z_1$
(2) Parametrické rovnice přímky určené
  a) bodem z_1 a směrovým vektorem s $\quad z - z_1 = ts \quad (t \in \mathbb{R})$
  b) bodem z_1 a normálovým vektorem n $\quad z - z_1 = tni \quad (t \in \mathbb{R})$
(3) Rovnice v komplexních souřadnicích
  a) bod z_1 a normálový vektor n $\quad n\bar{z} + \bar{n}z - z_1\bar{n} - \bar{z_1}n = 0$
  b) bod z_1 a směrový vektor s $\quad s\bar{z} + \bar{s}z + z_1\bar{s} - \bar{z_1}s = 0$
(4) Dělicí poměr $\quad (z_1, z_2, z_3) := \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$
  Body z_1, z_2, z_3 leží na jedné přímce právě tehdy, když (z_1, z_2, z_3) je reálné číslo.

Kružnice

(1) Rovnice kružnice se středem s a poloměrem r je $\quad |z - s| = r^2$
(2) Dvojpoměr $\quad (z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{(z_1,z_2,z_3)}{(z_1,z_2,z_4)}$
  Body z_1, z_2, z_3, z_4 leží na jedné kružnici právě tehdy, když dvojpoměr (z_1, z_2, z_3, z_4) je reálné číslo.

Geometrie trojúhelníka

Mějme trojúhelník T s vrcholy v_1, v_2, v_3. Zvolíme-li vhodně souřadnicový systém, můžeme předpokládat, že kružnice opsaná tomuto trojúhelníku má střed v počátku a poloměr $r = 1$. Označme

$$s_1 = v_1 + v_2 + v_3, \quad s_2 = v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3, \quad s_3 = v_1 v_2 v_3.$$

Pomocí tohoto značení lze vyjádřit řadu význačných bodů trojúhelníku a elegantně dokázat různé věty z geometrie trojúhelníka.

(1) Trojúhelník T je rovnostranný právě tehdy, když $s_1 = 0$.
(2) Ortocentrum (průsečík výšek) trojúhelníku T je s_1.
(3) Těžiště trojúhelníku T dělí každou těžnici v poměru 2 : 1 od vrcholu a je to bod $t = \frac{s_1}{3}$.
(4) Kružnice $|z - \frac{s_1}{2}| = \frac{1}{2}$ (kružnice devíti bodů, Feuerbachova kružnice) prochází středy stran, patami výšek a středy úseček spojujících ortocentrum s vrcholy trojúhelníku T.
(5) Nechť $s_1 \neq 0$. Feuerbachova kružnice se dotýká kružnice vepsané a všech kružnic připsaných trojúhelníku T.
(6) Nechť $s_1 \neq 0$. Přímka $\bar{z} - \frac{s_2}{s_1 s_3} z = 0$ (Eulerova přímka) prochází ortocentrem, těžištěm, středem kružnice opsané a středem Feuerbachovy kružnice trojúhelníku T.
(7) Nechť v_4 je libovolný bod kružnice opsané trojúhelníku T. Paty kolmic spuštěných z bodu v_4 na strany trojúhelníku T leží na jedné přímce (Simsonova přímka bodu v_4).
(8) Nechť T je nerovnostranný a nepravoúhlý. Označme A trojúhelník, jehož strany leží na tečnách ke kružnici opsané trojúhelníku T v jeho vrcholech (tzv. tečný trojúhelník). Kružnice $|z - \frac{2 s_1 s_3}{s_1 s_2 - s_3}| = \frac{2}{|s_1 s_2 - s_3|}$ je kružnice opsaná tečnému trojúhelníku A. Střed této kružnice leží na Eulerově přímce.
(9) Přímky spojující vrcholy trojúhelníku T s odpovídajícími vrcholy trojúhelníku tečného k T se protínají v jednom bodě (Lemoinův bod) $L := \frac{2{s_2}^2 - 6 s_1 s_3}{s_1 s_2 - 9 s_3}$.

Literatura.

- M. Ráb, *Komplexní čísla v elementární matematice*, Vydavatelství Masarykovy univerzity, 1996
- J. Švrček, J. Vanžura, *Geometrie trojúhelníka*, SNTL, 1988