Několik poznatků, které se Ti mohou hodit

Úlohy 6. série se týkají řešení funkcionálních rovnic, což jsou rovnice, ve kterých hledaná neznámá je nějaká funkce. V tomto textu popíšeme základní metody řešení funkcionálních rovnic. Kromě toho se budeme zabývat vlastnostni spojitých funkcí. Většinu jejich vlastností nebudeme dokazovat, ale při řešení příkladů se na ně můžeš bez důkazu odvolávát. Podrobněji se problematice funkcionálních rovnic věnuje např. sbírka Školy mladých matematiků 55, Ljubomir Davidov: Funkcionální rovnice, Mladá Fronta, Praha 1984.

Základní metoda řešení funkcionálních rovnic je tzv. substituční. Spočívá, řečeno co nejobecněji, v následujícím postupu: Předpokládáme, že už máme nějaké řešení funkcionální rovnice, a vhodnou volbou proměnných se snažíme najít explicitní tvar tohoto řešení. Poté ověříme, zda takto získaná funkce dané funkcionální rovnici skutečně vyhovuje. Objasníme to na jednoduchém příkladu.
Příklad: Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, splňující $f(x+y) = f(x) + y$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.
Řešení: Předpokládejme, že již máme nějakou funkci f řešící rovnici. Pak musí platit (označíme si $c = f(0)$ a dosadíme $x = 0$ do zadání) $f(y) = c + y$. Naopak dosadíme-li funkci f v takto zjištěném tvaru do zadání, zjistíme, že $f(y) = c + y$ řeší rovnici pro každé $c \in \mathbb{R}$. Tím je úloha vyřešena.

Teď se budeme zabývat spojitými funkcemi. Přesnou definici uvádět nebudeme, postačí nám intuitivní představa. Spojité funkce si můžeme přibližně představit jako ty, jejichž graf lze nakreslit jedním tahem — je souvislý. V podstatě většina běžných funkcí je spojitých. Funkce $f(x) = x$ je spojitá. Platí, že součet a součin dvou spojitých funkcí je spojitý. Odtud lze indukcí odvodit, že libovolná polynomická funkce[1] je spojitá. Dále pro $f(x), g(x)$ spojité je funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v těch bodech, kde $g(x) \neq 0$. Další spojité funkce jsou např. $\sin x, \cos x, a^x, \log_a x$ pro $a > 0$. Je-li obor hodnot funkce $f(x)$ částí definičního oboru funkce $g(x)$, pak $g(f(x))$ je také spojitá. Dále je-li funkce $f(x)$ spojitá a ryze monotónní (rostoucí nebo klesající), pak i funkce inverzní k funkci $f(x)$ je spojitá. Pomocí těchto vlastností lze budovat z uvedených spojitých funkcí funkce nové.

Důležitá vlastnost spojitých funkcí je tzv. Darbouxova vlastnost nabývání mezihodnot. Je-li $f(x)$ spojitá, pak pro $x_1 < x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$ funkce $f(x)$ nabývá na intervalu (x_1, x_2) všech hodnot mezi $f(x_1), f(x_2)$. Důsledkem tohoto je tvrzení, že je-li $f(x_1) < 0$ a $f(x_2) > 0$ (nebo naopak), pak existuje číslo $x_0 \in (x_1, x_2)$, pro něž $f(x_0) = 0$.

Dále vyložíme tzv. Cauchyovu metodu řešení funkcionálních rovnic, ve kterých hledáme pouze spojitá řešení. Nejdřív ale budeme potřebovat několik pojmů a tvrzení.

Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je *hustá* v $\mathbb{R}$, jestliže pro každé $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ existuje číslo $m \in M$, pro které $m \in (a, b)$.

Tedy každý otevřený interval musí obsahovat nějaké číslo z husté množiny. Lze ukázat, že každý otevřený interval už nutně obsahuje nekonečně mnoho čísel libovolné husté množiny.

[1]Tedy funkce, kterou lze vyjádřit ve tvaru $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$.

Lemma 1. *Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je hustá v $\mathbb{R}$.*

Důkaz: Nechť $a < b$ jsou libovolná reálná čísla. Jelikož $b - a > 0$, tak jistě existuje $n \in \mathbb{N}$, pro které $n(b-a) > 1$. Pak ale interval (na, nb) nutně obsahuje číslo $z \in \mathbb{Z}$, konkrétně např. $z = \lfloor na+1 \rfloor$. Pak ale interval (a,b) obsahuje racionální číslo $\frac{z}{n}$. Tím je lemma 1 dokázáno.

Podobně lze ukázat, že množina všech dyadických racionálních čísel, tedy těch, jež je možno vyjádřit ve tvaru $\frac{z}{2^n}$, kde $z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0$, je hustá v $\mathbb{R}$.

Lemma 2. *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je hustá v $\mathbb{R}$. Navíc platí $f(m) = g(m)$ pro každé $m \in M$. Pak platí $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.*

Toto lemma je intuitivně jasné a nebudeme ho zde dokazovat. Pokud někoho zajímá precizní důkaz, najde ho např. v již zmíněné knížečce Funkcionální rovnice od L. Davidova.

Teď už můžeme formulovat samotnou Cauchyho metodu. Řekněme, že máme funkcionální rovnici, u které nás zajímají pouze spojitá řešení. Pak můžeme nejdříve určit všechna řešení dané funkcionální rovnice, která jsou definovaná pouze na nějaké husté množině (nejčastěji $\mathbb{Q}$) a pak využít spojitosti tohoto řešení k rozšíření na celou množinu $\mathbb{R}$ (lemma 2 nám říká, že to lze provést nanejvýš jedním způsobem). Objasníme to na následujícím příkladu.

Příklad: Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $f(x+y) = f(x)f(y)$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.

Řešení: Předpokládejme, že máme nějaké řešení f této rovnice. Je-li pro nějaké t reálné $f(t) = 0$, pak volbou $x = z - t, y = t$ dostáváme $f(z) = f(z - t + t) = f(z-t)f(t) = 0$ pro každé $z \in \mathbb{R}$. Dále se tedy budeme zajímat jen o nenulová řešení. Předně pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) = \Big(f(\frac{x}{2})\Big)^2 > 0$. Tedy funkce $f(x)$ nabývá všude kladných hodnot. Označme si $f(1) = c > 0$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $f(n) = c^n$. Pak $f(n+1) = f(n)f(1) = c^n c = c^{n+1}$. Odtud matematickou indukcí plyne $f(n) = c^n$ pro každé přirozené číslo n. Analogicky dokážeme $f(nx) = \Big(f(x)\Big)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. Tedy jsou-li $m, n \in \mathbb{N}$, pak $f(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{\Big(f(\frac{m}{n})\Big)^n} = \sqrt[n]{f(n\frac{m}{n})} = \sqrt[n]{f(m)} = \sqrt[n]{c^m} = c^{\frac{m}{n}}$. Tedy vztah $f(x) = c^x$ platí pro každé kladné racionální číslo x. Dále $f(0) = f(0+0) = \Big(f(0)\Big)^2 > 0$, tedy $f(0) = 1 = c^0$. Tudíž pro každé kladné racionální x platí $1 = f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x) \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{c^x} = c^{-x}$. Tedy jsme dostali platnost výrazu $f(x) = c^x$ pro všechna racionální čísla x. Definujeme-li funkci $g(x) = c^x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pak $f(x)$ i $g(x)$ jsou spojité funkce (o $f(x)$ to víme ze zadání), které se shodují v každém racionálním čísle. Jelikož množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je podle lemmatu 1 hustá v $\mathbb{R}$, tak podle lemmatu 2 platí $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tedy pro každé reálné číslo x platí $f(x) = c^x$, kde $c > 0$. Dosadíme-li funkci $f(x) = c^x$ do zadání, zjistíme, že $f(x) = c^x$ je skutečně řešením dané rovnice pro každé $c > 0$. Úloha má tedy spojitá řešení[2] $f(x) = 0$ a $f(x) = c^x$ pro každé $c > 0$. Tím je úloha vyřešena.

[2] Lze ukázat, že tato funkcionální rovnice má mnoho nespojitých řešení.

Poznámka: V příkladu číslo 7 šesté série se vyskytuje pojem omezené funkce. Pro připomenutí řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená, jestliže existuje reálná konstanta K taková, že nerovnost $|f(x)| < K$ je splněna pro každé $x \in \mathbb{R}$.