Funkcionální rovnice pro mírně pokročilé

Filip Jaroš

Vzpomínám si, že když jsem poprvé stanul tváří v tvář funkcionální rovnici, stáhnul jsem ocas a s pokorou se poroučel. Vůbec jsem nevěděl, jak se dá takové zrůdě dostat na kobylku. Aby bylo jasno, funkcionální rovnice je třeba toto: $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Úkolem je určit všechny reálné funkce f, pro které je tato rovnost splněna, a to bez pardónu, čili pro všechna reálná x, y. Na jedno řešení přijdeme hned, $f(x) = x$, potíž je v tom, že nás zajímá, jestli neexistují ještě nějaká další řešení. A protože rovnice, kde jako neznámá vystupuje funkce, trochu překvapivě nejsou jen mučidlem intelektuálních olympioniků, ale vyskytují se i v praxi, občas v zadání úlohy přibude požadavek (tedy vlastně omezení), aby funkce byla spojitá (o nespojitou funkci bych si ani hůl neopřel). Na spojité obludky si troufnul čacký Francouz Cauchy, jeho způsob boje (pro zasvěcené, jen mezi námi, jde o Cauchyho metodu) bude předveden na přednášce.

Ve všech úlohách hledáme reálnou funkci splňující (ne)rovnost pro všechny reálné hodnoty proměnných, nejprve si osaháme některé jednoduché úlohy:

1) $f(x+y) = f(y) \cdot a^x$, kde $a > 0$, $a \neq 1$.

2) $f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$.

3) Je dána funkce f spojitá na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s hodnotami $f(0) = f(1) = 1$, jež pro každá dvě čísla $x \leq y$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ splňuje rovnici $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y)$. Určete $f(\frac{1}{7})$.

4) $\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}$.

Dále vyřešíme funkcionální rovnici obecného tvaru $f(x+y) = F(f(y), x)$, kde F je libovolná funkce dvou proměnných. Všimněte si, že tento tvar má první úloha. Cauchyho metodu vyložím na řešení úloh $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ a $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, v obou případech je f spojitá funkce. Zobecněním předešlé úlohy je funkcionální rovnice $f(x+y) = F(f(x), f(y))$, kde F je libovolná funkce. Prozkoumáme, jaké podmínky musí F splňovat, aby tato rovnice měla řešení.