Funkcionální rovnice

Pavel Podbrdský — 20. prosince 2000

Co to je funkcionální rovnice?

Přesnou definici tohoto pojmu nejsme schopni podat. Funkcionální rovnice je zhruba řečeno rovnice, ve které vystupuje jako hledaná neznámá nějaká funkce. Rovnice pro neznámou funkci by neměla obsahovat derivace, integrály, ... Často o hledané funkci předpokládáme nějaké další vlastnosti (např. definiční obor, spojitost, omezenost apod.).

Nejdůležitější metody řešení

Základní metoda řešení funkcionálních rovnic je tzv. *substituční* metoda. Spočívá, řečeno co nejobecněji, v následujícím postupu: Předpokládáme, že už máme nějaké řešení funkcionální rovnice a vhodnou volbou proměnných se snažíme najít explicitní tvar tohoto řešení. Poté ověříme, zda takto získaná funkce dané funkcionální rovnici skutečně vyhovuje. Osvětlíme si to na jednoduchém příkladu: Řešme funkcionální rovnici

$$f(x+y)+2f(x-y)-4f(x)+xf(y)=3y^2-x^2-2xy+xy^2,$$

přičemž se budeme zajímat jen o taková její řešení f, jež jsou definována na celé reálné ose. Předpokládejme tedy, že f je jedno takové řešení a označme $f(0)=c$. Položíme-li v zadaném vztahu $y=0$, dostaneme

$$-f(x)+cx=-x^2$$

neboli

$$f(x)=x^2+cx.$$

Dosadíme-li v získaném vztahu $x=0$, dostaneme navíc

$$f(0)=0.$$

Odtud vidíme, že $c=0$ a tedy

$$f(x)=x^2.$$

Z předpokladu, že funkce f řeší naši rovnici jsme odvodili, že nutně musí platit vztah $f(x)=x^2$. Teď už stačí jen získaný vztah dosadit do původní rovnice a ověřit, že funkce $f(x)=x^2$ je řešením naší rovnice.

V případě, kdy hledáme pouze spojitá řešení dané rovnice, můžeme často použít tzv. *Cauchyovu* metodu založenou na následující větě.

Věta: Nechť $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jsou spojité funkce takové, že $f(x)=g(x)$ pro každé $x\in\mathbb{Q}$. Pak $f=g$.

Poznamenejme, že v předchozí větě lze množinu $\mathbb{Q}$ nahradit libovolnou jinou *hustou* množinou (tj. takovou, která obsahuje alespoň jeden bod v každém neprázdném otevřeném intervalu).

Pro ilustraci Cauchyovy metody si vyřešíme následující příklad: Najděte všechny spojité funkce definované na celé reálné přímce, které vyhovují rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Předpokládejme, že máme jedno takové řešení $f(x)$. Pak dosazením $y = 0$ zjistíme, že nutně $f(0) = 0$. Dosazením $y = -x$ dostáváme $f(-x) = -f(x)$. Matematickou indukcí snadno dokážeme vztah $f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$, speciálně $f(nx) = nf(x)$ pro každé reálné číslo x a přirozené číslo n. Označme si $f(1) = c$. Pak $f(n) = cn$ pro každé přirozené číslo n. Jsou-li m a n přirozená čísla, dostáváme $cm = f(m) = nf(m/n)$, tedy $f(m/n) = cm/n$. Vztah $f(x) = cx$ tedy platí pro každé kladné racionální číslo x. Díky vztahu $f(0) = 0$ a $f(-x) = -f(x)$ máme platnost vztahu $f(x) = cx$ pro každé racionální číslo x. Uvažujme nyní funkci $g(x) = x$ definovanou na celé reálné ose. Pak f a g jsou spojité funkce, které se shodují na množině $\mathbb{Q}$. Podle Věty dostáváme $f = g$. Pro funkci f jsme tedy odvodily vztah

$$f(x) = cx,$$

který musí platit pro každé reálné číslo x. Teď již jen ověříme dosazením, že všechny funkce f v tomto tvaru skutečně řeší naši funkcionální rovnici.

Příklady

Nebude-li řečeno jinak, hledají se reálné funkce definované na celé reálné ose. Uvedené vztahy jsou vždy (pokud není uvedeno jinak) splněny pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.

1. příklad $f(x+y) + 2f(x-y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2$.

2. příklad $f(x+y) = f(y)a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ je parametr.

3. příklad $f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$.

4. příklad $f(x+y) + f(x-y) - f(x) = f(y) + x - y^2$.

5. příklad $f(x+y) + f(x-y) = f(x) + 6xy\sqrt[3]{f(y)} + x^3$.

6. příklad $f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y$.

7. příklad $f(x+y) - 3f(x-y) = x^2\left(f(y) + 1 - y^2/2\right) - 2f(x) + y(4x - y)$.

8. příklad $f(x)f(x+y) = (f(y)^2)(f(x-y))^2 a^{y+4}$, $a > 0, a \neq 1$ je parametr.

9. příklad $f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y$.

10. příklad $2f(x+y)+f(x-y)=f(x)(2a^y+a^{-y})$, $a>0, a\neq 1$ je parametr.

11. příklad $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$.

12. příklad $yf(x)+xf(y)=f(x+y)$.

13. příklad $f(2x+y)=f(x+2y)f(x+y)$.

14. příklad $f(5x)=f(\pi^x)+x$.

15. příklad $f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2$.

16. příklad $f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$.

17. příklad Najděte všechny funkce $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, pro které platí
(a) $f(x(f(y))=yf(x)$ pro všechna kladná x, y,
(b) $f(x)\to 0$ pro $x\to\infty$.

18. příklad Najděte všechny funkce $f:(-1,\infty)\to(-1,\infty)$, jež splňují
(a) $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$ pro všechna $x,y>-1$,
(b) funkce $f(x)/x$ je rostoucí na $(-1,0)$ i na $(0,\infty)$.

19. příklad Najděte nějakou funkci $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ takovou, že pro všechna kladná racionální x, y platí $f(xf(y))=f(x)/y$.

20. příklad $2f(x+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}f(x)+\cos x-\sin x$, f je omezená.

21. příklad $f(x+y)=f(x)+f(y)$, f je spojitá.

22. příklad $f(x+y)=f(x)+f(y)$, f je rostoucí.

23. příklad $f(x+y)=f(x)+f(y)$, f je omezená na daném intervalu (a,b), $a<b$.

24. příklad $f(x+y)=f(x)f(y)$, f je spojitá.

25. příklad $f(x+y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$, $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ je spojitá, $x,y>0$.

26. příklad $f(x+y)=\frac{f(x)f(y)+1}{f(x)+f(y)}$, $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ je spojitá, $x,y>0$.

27. příklad $f(x+y)+f(x-y)=2(f(x)+f(y))$ f, je spojitá.

28. příklad $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$, f je spojitá.

Organizátoři Kroužku matematiky

Ti přejí

veselé Vánoce

a

šťastný Nový rok!