Funkcionálne rovnice

Martin Fraas

Úvod

Presnú definíciu pojmu funkcionálna rovnica nie sme schopní podať. Môžeme však povedať, že je to rovnica, u ktorej sa hladá neznáma funkcia (alebo aj viac neznámych funkcií) na základe zadaných vlastností tejto funkcie; tieto vlastnosti sú vyjadrené rovnicou, alebo i niekoľkými rovnicami, v ktorých nevystupujú derivácie ani neurčité integrály týchto funkcií. Často sa pri riešení rovnice omezujeme na hľadanie riešení s dodatočnými podmienkami, ako napríklad spojitosť, omezenosť a iné.

Obecná metóda na riešenie rovníc neexistuje.[1] My v ďalšom ukážeme dve najznámejšie metódy na ich riešenie.

Substitučná metóda

Substitučná metóda spočíva v nasledujúcom prirodzenom postupe: Predpokladajme, že daná rovnica už niake riešenie má, a vhodnou zámenou premenných resp. dosadením konkrétnych hodnôt do rovnice sa snažíme nájsť explicitný tvar tohoto riešenia. Potom overíme, že takto získaná funkcia skutočne rovnici vyhovuje. Postup si osvetlíme na jednoduchom príklade:

Buď $a > 0$, $a \neq 1$ reálné. Riešme funkcionálnu rovnicu

$$f(x+y) = f(y) \cdot a^x,$$

a hľadajme iba tie riešenia ktoré sú definované na celej reálnej ose. Dosaďme do rovnice $y = 0$ a dostaneme vzťah

$$f(x) = f(0) \cdot a^x.$$

Označme $c \equiv f(0)$ a skúsme či $f(x) = c \cdot a^x$ nevyhovuje našej rovnici. Ľahko overíme, že

$$f(x) = c \cdot a^x$$

skutočne splňuje rovnicu pre ľubovoľnú reálnu konštantu c.

Definícia. (Funkcionálna rovnica s okrajovou podmienkou) *Nech a, b sú dve reálne čísla. Funkcionálnu rovnicu spolu s podmienkou na hľadané riešenie f, $f(a) = b$ (teda graf riešenia prechádza bodom $[a, b]$) nazvem rovnicou s okrajovou podmienkou.*

[1] Aké máme definície také máme vety.

Definícia. („pokrytia celej roviny“) *Buďem hovoriť, že riešenia rovnice pokrývajú celú rovinu, ak má táto rovnica riešenie pre každú okrajovú podmienku.*

Poznámka. Príklad spomínaný vyššie „pokrýva celú rovinu“.

Cauchyho metóda

Domluva. Ak nepovieme výslovný opak budeme pod funkciou myslieť v celom tomto odstavci spojitú funkciu.

Celá Cauchyho metóda je založená na nasledujúcej vete z analýzi (resp. jej jednoduchom zobecnený).

Veta. *Spojitá funkcia je jednoznačne určená hodnotami v racionálnych bodoch.*

A teraz trošku formálnejšie:

Definícia. (hustej množiny) *Podmožinu reálnych čísel nazývame hustou ak sa v každom intervali nenulovej dĺžky nachádza bod našej podmnožiny.*

Veta. *Ak spojité funkcie $f(x)$ a $g(x)$ so spoločným definičným oborom nadobúdajú rovnakých hodnôt na niakej hustej množine reálnych čísel, potom sú totožné.*

Podstata Cauchyho motódy spočíva v nasledujúcich troch krokoch:
1) Niakym vhodným postupom (napríklad substitučnou metódou) určíme riešenia rovnice na prirodzených číslach.
2) Rozšírime nájdené riešenie na všetky racionálne čísla. (V najjednoduchšom prípade prostým overením, že funkcia nájdená v bode 1) spĺňa rovnicu aj pre racionálne čísla.)
3) Odvoláme sa na vetu zo začiatku odstavca.

Osvetlíme si metódu na najznámejšom príklade. Riešme funkcionálnu rovnicu
$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$
Na úvod dosadíme do rovnice $x = 0$, $y = 0$ a dostaneme:
$$f(0) = 0.$$
Teraz už ku Cauchyho metóde, matematickou indukciou ľahko dokážeme, že:
$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$
a teda $f(nx) = nf(x)$. Položme $c \equiv f(1)$ a máme splnený krok 1).
$$f(n) = cn, \quad \text{pre všetky prirodzené čísla } n.$$

Nech ďalej m, n sú dve prirodzené čísla potom

$$nf(\frac{m}{n}) = f(m) = cm$$

a teda s prihliadnutím k tomu, že

$$f(x-x) = f(0) = 0 = f(x) + f(-x) \quad \text{teda} \quad f(-x) = -f(x)$$

prehlásime naše pevné presvedčenie, že

$$f(q) = cq, \quad \text{pre všetky racionálne čísla } q.$$

Splnili sme krok 2) a k úspešnému doriešeniu už stačí krok 3) iba spomenúť. Teda

$$f(x) = cx, \quad \text{pre ľubovoľnú konštantu } c.$$

Príklady

(1) $f(x+y) + 2f(x+y) - 4f(x) + xf(x) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2$.
(2) $f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$.
(3) $f(x+y) - 3f(x-y) = x^2 \left[\frac{f(y)+1-1}{2y^2}\right] - 2f(x) + y(4x-y)$.
(4) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y$.
(5) $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$.
(6) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, f je rostoucí.
(7) $f(xy) = f(x)f(y)$, f je spojitá.
(8) $f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$, f je spojitá.
(9) $f(x+y)f(x-y) = (f(x))^2$, f je spojitá.
(10) $f(x) + \frac{1}{\sin x} = f(\frac{x}{2})$.

Použitá literatúra

1. Škola mladých matematikov 55, Fukncionálne rovnice.
2. http://mks.mff.cuni.cz /archiv/funkcionalne rovnice.