Funkcionální rovnice

Háňa Bendová

Úvod

Funkcionální rovnicí míníme takovou rovnici, ve které nevystupují jako hledané neznámé čísla, ale funkce. Na této přednášce si osvojíme práci s funkcionálními rovnicemi a naučíme se některé základní metody jejich řešení.

Substituční metoda

Substituční metoda je základní metodou řešení funkcionálních rovnic a spočívá v následujícím postupu:

Předpokládáme, že už máme řešení funkcionální rovnice, a vhodným dosazením za proměnné se snažíme zjistit, co toto řešení splňuje. Někdy zjistíme, že má nějakou užitečnou vlastnost, kterou můžeme dále využít, jindy dostaneme přímo tvar, jak musí vypadat. Pokud zjistíme, že řešení musí mít nějaký konkrétní tvar, je nutné jej dosadit do zadané rovnice a zkouškou ověřit, zda je skutečně řešením.

Příklad. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnici

$$f(x+y) = f(x) + y$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Řešení. Předpokládejme, že již máme řešení f. Označme $c = f(0)$ a dosaďme $x = 0$. Dostáváme

$$f(y) = y + c$$

a dozasením do původní rovnice snadno ověříme, že taková funkce je řešením pro libovolné reálné c:

$$f(x+y) = x + y + c = (x+c) + y = f(x) + y.$$

Vhodné hodnoty k dozasení (nejčastěji používané):

- $x, y = 0$,
- $y = x$, $y = -x$,
- $x = f(x)$,
- dozasení takové, aby se rovnaly výrazy, které se předtím nerovnaly.

Využití vlastností funkce

Definice. *Funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je*

(i) sudá, *resp.* lichá, *jestliže* $\forall x \in \mathbb{R}$ *platí* $f(x) = f(-x)$, *resp.* $f(x) = -f(-x)$,

(ii) rostoucí, *resp.* klesající, *jestliže* $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *pokud* $x < y$, *pak* $f(x) < f(y)$, *resp.* $f(x) > f(y)$,
(iii) nezáporná *(nebo* kladná*), jestliže* $f(x) \geq 0$ *(nebo* $f(x) > 0$*) pro všechna* $x \in \mathbb{R}$,
(iv) prostá, *jestliže* $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *platí* $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ *(nebo ekvivalentně* $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$*)*,
(v) na, *jestliže* $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\colon f(x) = y$,
(vi) bijekce, *jestliže je prostá a na.*

Využití:

- Sudost nebo lichost ulehčuje práci na polovinu, pokud je potřeba řešit rovnici zvlášť pro kladná a záporná čísla.
- Je-li funkce f prostá a platí $f(A) = f(B)$, pak dostáváme $A = B$, přičemž A, B mohou být i složitější výrazy.
- Je-li funkce f rostoucí, pak je také prostá.
- Je-li funkce f na a $x \in \mathbb{R}$, můžeme pracovat s $c \in \mathbb{R}$ takovým, že $f(c) = x$.

Speciální tvary rovnic

Při řešení funkcionálních rovnic velmi často narazíme na to, že má funkce jednu z následující vlastností, proto je užitečné rozmyslet si, jak v takových případech postupovat.

1) $f(f(x)) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$: potom f je bijekce, tedy můžeme využít jejích vlastností, a často se také vyplatí zkusit za x dosadit $f(x)$, neboť $f(x)$ pak přejde v x;
2) $f(f(x)) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$: uvědomme si, že pro všechna $x \in \mathrm{Im} f = \{y \in \mathbb{R}\colon \exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = y\}$ je $f(x) = x$.
3) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$: tato rovnice se nazývá Cauchyova a za dodatečných předpokladů na funkci f (spojitost, monotonie, ...) jsou jejími jedinými řešeními funkce tvaru $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$. To se dá dokázat Cauchyovou metodou, kterou se na této přednášce nebudeme zabývat. Některé funkcionální rovnice se dají vyřešit převedením na Cauchyovu rovnici, jejíž řešení známe.

Pevné body

Definice. Pevný bod *funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je takový bod* $x \in \mathbb{R}$, *pro nějž* $f(x) = x$.

V některých úlohách nám může vyšetření pevných bodů pomoci. Například pokud se dopracujeme k tomu, že $f(g(x)) = g(x)$, a dokážeme, že f má jediný pevný bod, můžeme tím úlohu úplně vyřešit.

Symetrie

Je-li výraz na jedné straně funkcionální rovnice symetrický, tj. nezmění se, pokud vzájemně zaměníme proměnné, pak z toho můžeme usoudit, že ani výraz na pravé straně se vzájemnou záměnou proměnných nezmění. Neobsahuje-li rovnice symetrický výraz rovnou, lze jej často zíkat vhodným dosazením.

Příklad. Najděte všechny funkce f, které splňují pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ funkcionální rovnici

$$f(f(x) + f(y)) = f(x) + y.$$

Řešení. Výraz $f(f(x) + f(y))$ je symetrický, proto platí

$$f(x) + y = f(f(x) + f(y)) = f(f(y) + f(x)) = f(y) + x.$$

Dosazením $y = 0$ zjistíme, že $f(x) = x + c$, kde $c \in \mathbb{R}$, a zkouškou ověříme, že vyhovuje jediná funkce, a to $f(x) = x$.

Příklady

Příklad. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x)f(yf(x)) = f(x + y).$$

Příklad. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna kladná reálná x, y rovnici

$$f\left(x + f\left(y\right)\right) = f\left(x + y\right) + f\left(y\right).$$

Příklad. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f^2(x).$$

(Britská MO 1997 a 2000)

Příklad. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnici

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část x. (IMO 2010)

Příklad. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y)).$$

(MEMO 2009)

Příklad. Najděte všechny funkce $f\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ takové, že

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

pro všechna w, x, y, z splňující $wx=yz$. (IMO 2008)

Příklad. Vyřešte pro $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcionální rovnici

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1.$$

(IMO 1999, Problem 6)

Literatura

[1] Marko Radovanovič: *Functional equations*, *www.imomath.com.*
[2] Andrei Jorza: *Functional Equations*, USA MOSP.
[3] Franta Konopecký: *Funkcionální rovnice*, sborníčkový příspěvek Ramzová 2006.
[4] Franta Konopecký: *Funkcionální rovnice*, bakalářská práce, 2008.
[5] Fórum Mathlinks – *www.mathlinks.ro.*