Funkcionální rovnice

Filip Jaroš

Zkuste řešit některé z následujících šesti úloh. I když nebudete úspěšní, bude to pro vás užitečné, protože na přednášce lépe porozumíte tomu, proč volám na pomoc právě tu a ne jinou fintu. Všechny nabídnuté úlohy jsou z oblasti funkcionálních rovnic zobrazujících přirozená čísla do přirozených čísel. Na rozdíl od obecných funkcionálních rovnic k jejich řešení nejsou třeba žádné speciální znalosti a postupy, stačí bystrá hlava a trocha trpělivosti. Pátá úloha jako funkcionální rovnice nevypadá, nicméně zde není omylem. Všechny problémy až na poslední byly převzaty z mezinárodních kol MO.

1. úloha. Nechť f je funkce zobrazující množinu všech přirozených čísel do sebe. Jestliže pro každé přirozené číslo n platí $f(n+1) > f(f(n))$, potom $f(n) = n$ pro každé přirozené číslo n. Dokažte.

2. úloha. Množina všech přirozených čísel nechť je sjednocením dvou disjunktních podmnožin $\{f(1), f(2), f(3), \dots\}$ a $\{g(1), g(2), g(3), \dots\}$, přičemž $f(1) < f(2) < f(3) < \cdots$, $g(1) < g(2) < g(3) < \cdots$ a $g(n) = f(f(n)) + 1$ pro všechna n. Určete $f(240)$.

3. úloha. Je dána funkce $f(x, y)$ splňující podmínky $f(0, y) = y + 1$, $f(x+1, 0) = f(x, 1)$ a $f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))$ pro všechna nezáporná x, y. Určete $f(4, 1981)$.

4. úloha. Uvažujme funkci f zobrazující množinu všech přirozených čísel do množiny všech celých nezáporných čísel. Předpokládejme, že $f(2) = 0$, $f(3) > 0$, $f(9999) = 3333$ a že rozdíl $f(m+n) - f(m) - f(n)$ nabývá pro libovolná přirozená čísla m, n hodnoty 0 nebo 1. Určete $f(1982)$.

5. úloha. Pro každá dvě celá nezáporná čísla m, n je $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ celé číslo. Dokažte.

6. úloha. Nechť f je striktně rostoucí funkce zobrazující množinu všech přirozených čísel do sebe, která navíc splňuje podmínku $f(f(n)) = 3n$. Najděte $f(1994)$.