Funkcionální dělitelnosti

Matěj Doležálek

Abstrakt. V příspěvku si představíme hromadu funkcionálních dělitelností – úloh, kde podobně jako ve funkcionálních rovnicích hledáme jako řešení nějakou funkci, avšak využíváme k tomu poznatky z teorie čísel. Postupy řešení, které si ukážeme, tak budou obnášet hlavně vhodné úpravy dělence, vlastnosti prvočísel a chytrá dosazení k výrobě prvočíselných tvarů.

Čas od času potká člověk úlohu s funkcionální rovnicí – je dána rovnost, v níž nějak (často dost složitě) figuruje neznámá funkce a která má platit pro všechny volby proměnných. Jedná se tedy o jakousi soustavu nekonečně mnoha rovnic o nekonečně mnoha proměnných.

Funkcionální dělitelnosti jsou ještě o něco exotičtější. Jak by člověk z názvu čekal, jedná se o „soustavu nekonečně mnoha dělitelností s nekonečně mnoha proměnnými“. Dělitelnost je ale slabší vztah než rovnost, a tak metody, které se hodí k řešení funkcionálních dělitelností, vypadají dost jinak než metody řešení funkcionálních rovnic. Většina úloh nevyžaduje znalost žádných pokročilých tvrzení, ale u pár výjimek se může hodit malá Fermatova, Wilsonova či Dirichletova věta.

Úlohy v příspěvku jsou seřazeny do kapitolek podle metod řešení a uvnitř kapitolky zhruba podle obtížnosti. Některé úlohy však jdou vyřešit více způsoby, proto není třeba brát rozdělení úloh do kapitol zcela striktně.

Nerovnosti

Dělitelnost se za vhodných okolností dá zeslabit na nerovnost: pokud $A \mid B$ a navíc je B nenulové, pak už $|A| \le |B|$. Speciálně když je B kladné, tak už $B = |B| \ge |A| \ge A$.

Úloha 1. Najděte všechny *omezené* funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$a - b \mid f(a) - f(b)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 2. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + b! \mid a + f(b)!$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 3. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$\begin{gathered} a + f(b) \mid f(b + f(a)), \\ f(a) - 2017 \mid a - 2017. \end{gathered}$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (IMOC 2017)

Úloha 4. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a)^b + f(b)^a \mid a^2 + a + 2f(ab)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 5. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a + f(b)) + a \mid 2f(a) + b$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Nekonečno dělitelů nuly

Když se povede zafixovat pravou stranu dělitelnosti a vyrábět pro ni nekonečně mnoho (různých) dělitelů na levé straně, pak je tato pravá strana rovná nule – jenom nula totiž má nekonečně mnoho dělitelů. Pokud je ve vyráběných dělitelích „volná“ jen nějaká hodnota f, musíme dát pozor na to, jak vypadá obor hodnot!

Úloha 6. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$a + f(b) \mid f(a) + af(b)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (Balkan MO 2017)

Úloha 7. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$a + f(b) \mid f(a)^2 + af(b)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 8. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + f(b) \mid a^3 + f(b)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 9. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$p \mid f(n) \cdot f(p-1)! + n^{f(p)}$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a prvočíslo p. (Mexican Quarantine MO)

Úloha 10. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) \mid f(b) + a - b$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Prvočísla

Další dobrou strategií může být dosazovat prvočísla. Pokud na pravé straně dělitelnosti získáme prvočíslo nebo alespoň nějaký dobrý součinový tvar s prvočíslem, dost to omezí možnosti levé strany. Jakmile známe hodnoty funkce na nějaké nekonečné množině argumentů, lze už často úlohu snadno dořešit pomocí nekonečně mnoha dělitelů nuly.

Úloha 11. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$a^2 + f(b) \mid af(a) + b$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (ISL 2013 N1)

Úloha 12. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + b \mid a^2 + f(a)f(b)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (APMO 2019)

Úloha 13. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující

$$f(x)^2 + xy \mid x^2 + xf(y)$$

pro libovolná $x, y \in \mathbb{Z}$.

Úloha 14. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + f(b) \mid 2(a + b - 1)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (MEMO 2016)

Úloha 15. Je dána funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$ platí, že $\max\{f(a), b\}$ je násobek čísla $f(ab)$. Rozhodněte, zda musí existovat nekonečně mnoho $k \in \mathbb{N}$ takových, že $f(k) = 1$.

Úloha 16. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$a! + f(b)! \mid f(a)! + f(b!)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (BMO SL 2018)

Úloha 17. Je dáno přirozené číslo C. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná přirozená a, b splňující $a + b > C$ platí

$$a + f(b) \mid a^2 + bf(a).$$

(ISL 2019 N4)

Úloha 18. Je dáno liché přirozené číslo n. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující

$$f(x) - f(y) \mid x^n - y^n$$

pro libovolná $x, y \in \mathbb{Z}$. (ISL 2011 N3)

Úloha 19. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a)^2 + f(b) \mid \left(a^2 + b\right)^2$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (ISL 2004 N3)

Úloha 20. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + f(ab) \mid a + bf(a)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 21. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$ je číslo $f(a) + f(b) - ab$ nenulové a dělí $af(a) + bf(b)$. (ISL 2016 N6)

Indukce

S funkcionálními dělitelnostmi se často pohybujeme nad přirozenými (nebo aspoň nad celými) čísly. Může se tedy vyplatit postupovat indukcí: pokud máme tip na předpis pro f, můžeme jej dokazovat postupně. S indukcí může pomoci prostost funkce, kterou lze často získat skrze nekonečno dělitelů nuly.

Úloha 22. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jež pro $a, b \in \mathbb{N}$ splňují ekvivalenci

$$f(a) \mid f(b) - a \quad \Longleftrightarrow \quad a \mid b.$$

(Japonsko 2021)

Úloha 23. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $f(a!) = f(a)!$ a zároveň $a - b \mid f(a) - f(b)$ pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (USAMO 2012)

Úloha 24. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + f(b) \mid a^2 - b^2.$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (IMOC 2017)

Úloha 25. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které jsou na[1] a splňují, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$ a prvočíslo p platí $p \mid f(a+b)$, právě pokud $p \mid f(a) + f(b)$.

(ISL 2007 N5)

Zmenšování podílu

Většina úloh v tomto příspěvku má jedno společné – dost často se stává, že když se dopídíme k funkci, která funkcionální dělitelnost řeší, zjistíme, že po jejím dosazení nastává v dělitelnosti dokonce rovnost. Jindy je alespoň vzniklý podíl nějaký „malý“. Úlohy, které zadávají takhle „těsnou“ dělitelnost, se řeší dobře, neb tehdy je slušná šance, že půjde něco odhadnout a úloha tím padne.

Potíže se objevují, když zadaná dělitelnost není „těsná“. Co s tím? Můžeme zkusit zmenšit podíl: jestliže $A_1 \mid B_1$ a zároveň $A_2 \mid B_2$, pak i

$$A_1 A_2 \mid A_1 B_2 - A_2 B_1.$$

Intuici za takovýmto úkonem nastiňuje vztah

$$\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2} = \frac{B_2}{A_2} - \frac{B_1}{A_1}.$$

Když jsou navíc A_1, A_2 nesoudělná, pak je dokonce jisté, že přechodem ke „složené“ dělitelnosti nepřicházíme o žádnou informaci.

Úloha 26. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + b \mid a^2 - f(b^2)$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 27. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$a + f(b) \mid f(a) - b^4$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$.

Úloha 28. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(a) + f(b) + f(c) - ab - bc - ca \mid af(a) + bf(b) + cf(c) - 3abc$$

pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{N}$. (IMOC 2020)

Návody

1. Dosazuj čísla se vzdáleností větší než maximum f.

[1] Tedy pro libovolné $y \in \mathbb{N}$ existuje $x \in \mathbb{N}$ tak, že $f(x) = y$.

2. Jednou vezmi $a = 1$, podruhé $b = f(a)$.

3. Druhá dělitelnost dává pro velká x odhad. Použij ho v první dělitelnosti spolu se symetrií.

4. Využij symetrii a omez $f(a)$. Potom už by exponenciály v děliteli měly vypadat obzvlášť podezřele.

5. Kdyby někdy nastalo $f(n) < n$, vyrob z toho spor. Potom už bude vidět, že rozdíl $f(n) - n$ je omezený.

6. Při nekonečném oboru hodnot se na pravé straně zbav $f(b)$. Při konečném oboru hodnot naopak odstraň a.

7. Stejně jako předchozí úloha, jen je třeba korektně rozmyslet poslední část.

8. Případ konečného oboru hodnot pomůže vysporovat velká mocnina dvojky.

9. $f(1)$ je nesoudělné se vším. Obecněji nahlédni, že $f(n)$ má stejné prvočíselné dělitele jako n, a dělitelnost se podstatně zjednoduší.

10. Při nekonečném oboru hodnot je $f(n) - n$ konstanta. Při konečném oboru hodnot se dívej na množiny argumentů se stejnou funkční hodnotou a omez obor hodnot.

11. Dosaď $a = b = p$ a uvaž, zda $p \mid f(p)$. Dál pomůže horní odhad $f(n)$.

12. Dosaď $a = b = p$, zbav se na pravé straně f a poté rozeber možnosti.

13. Urči $f(p)$ pomocí odhadů absolutních hodnot. Pozor na znaménka!

14. Vyrob na pravé straně prvočíslo, jeden z případů jde po troše práce vysporovat.

15. Nejprve využij velká prvočísla, potom je zkus míchat dohromady a najít spor.

16. Wilsonova věta a $f(p - 1)$.

17. Najdi si dost čísel b, pro než $f(b) = kb$. To jde více způsoby, buďto trochu chytrý Dirichletův princip na prvočíslech, anebo třeba overkill s Dirichletovou větou :-).

18. BÚNO $f(0) = 0$, potom Dirichletův princip s prvočísly.

19. Vol $b = p - a^2$. Může se vyplatit brát vyšší a vyšší p.

20. Získej $f(p - 1)$, potom vystřel z kanónu.

21. Dosaď $a = b = p$, uprav pravou stranu a neboj se trochu rozebírat.

22. Prostota a indukce.

23. Rozeber pár možností a pak indukuj.

24. Neomezenost, prostost, indukce.

25. Rozmysli si, že f permutuje zbytky mod p. Potom indukuj.

26. Urozebírej $f(c)$ pro $c \in \{1, 2, 3, 4\}$, zkombinuj dvě dělitelnosti a indukuj s prostotou.

27. Umlať $f(1)$ a $f(2)$, následně kombinováním jejich dosazení získej odhad $f(a)$ na obě strany. Stačí, aby to fungovalo jen pro nějakou nekonečnou podmnožinu $\mathbb{N}$.

28. Nejdřív umlať $f(1)$, $f(2)$ a $f(3)$, pak zkus dosazovat s $p+1$. Skoro každý krok obnáší dost ošklivého rozebírání.

Literatura a zdroje

[1] *A treatise on functional divisibility; the power of primes!*, *https://artofproblemsolving.com/community/c989506h1942036*.

[2] Martin „Vodka" Vodička: *Funkcionálky nad prirodzenými číslami*, *i*KS 2017, Strmilov.