Funkcionální rovnice

Franta Konopecký

Úvod

Na této přednášce si osvojíte práci s funkcionálními rovnicemi, jejich řešeními a možnostmi postupu. Systematicky jsou tu probrány jednotlivé zajímavé vlastnosti funkcí a jak se dají z funkcionální rovnice vyčíst. Příspěvek ve sborníčku by měl sloužit jako ucelený manuál, jak funkcionální rovnice řešit.

Co je funkcionální rovnice, co vyjadřuje?
Zadání funkcionální rovnice může vypadat například následovně:

Úloha 1. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ splňující $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$.

Úloha 2. Hledejte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

pro $x, y \in \mathbb{R}$.

Úloha 3. Najděte všechny funkce definované na celé reálné ose splňující funkcionální rovnici

$$f(x+y) + 2f(x-y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2;\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Úloha 4. Najděte všechny funkce splňující rovnici

$$(f(x) + f(y))(f(u) + f(v)) = f(xu - yv) + f(xv + yu);\ x, y, u, v \in \mathbb{R}.$$

ad 1. Funkcionální rovnice (1) nám říká: „najděte všechny funkce, které splňují rovnici $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pro všechny hodnoty racionálních čísel x a y“. Dodat bychom ještě měli: „ … a ověřte, že vámi nalezené funkce vyhovují.“ Pro představu prozradím, že například funkce $f(x) = 2x$ této rovnici vyhovuje, protože $f(x+y) = 2(x+y)$ a $f(x) + f(y) = 2x + 2y = 2(x+y)$, takže je rovnice $f(x+{}$ ${}+y) = f(x) + f(y)$ splněna pro všechna požadovaná $x, y \in \mathbb{Q}$. Funkce $f(x) = x+1$ naopak nevyhovuje, protože $f(x+y) = x + y + 1 \neq x + 1 + y + 1 = f(x) + f(y)$.

ad 2. Funkcionální rovnice (2) má stejný tvar, ale se dvěma změnami. První je, že je definovaná na celém $\mathbb{R}$ a funkční hodnoty mohou nabývat na rozdíl od těch v (1) také reálných hodnot. Druhou je, že máme dodanou pomocnou podmínku, že je funkce spojitá. Bez této podmínky lze rovnici v $\mathbb{R}$ také vyřešit, ale řešení je ošklivější než nechutné. Důležité je si tu uvědomit, že řešení nalezená v (1) by mohla bez větších obtíží fungovat i v (2) (při správném rozšíření z $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$).

ad 3. Tato rovnice je příkladem těch, kde nám vedlejší výrazy „vylézají“ na povrch. Kromě funkčních výrazů typu $f(n\check{e}co)$ se v ní totiž objevují i výrazy typu x^2, xy, atd. Rovnice tohoto typu jsou většinou jednodušší, protože řešení v hodně případech přímo „vypadne“ nějakým speciálním dosazením za x nebo y, viz tzv. *substituční* metoda řešení.

ad 4. Toto je jedna z nejtěžších funkcionálních rovnic, s jakou jsem se setkal. Je v ní důležité mít přehled o většině triků, které se v tomto příspěvku naučíte. Na přednášce si ji vyřešíme, těšte se!

Základní metody řešení

Základními metodami řešení funkcionálních rovnic jsou *substituční* metoda a *Cauchyho* metoda.

Substituční metoda
Substituční metoda spočívá, řečeno co nejobecněji, v následujícím postupu: Předpokládáme, že už máme řešení funkcionální rovnice a vhodným dosazením za proměnné se snažíme ukázat, co by mělo toho řešení splňovat. Někdy nám vyjde užitečná vlastnost funkce ($f(x)$ je sudá, prostá, ...), jindy přímo tvar, jak musí vypadat. Pokud dostaneme tvar funkce (nebo si ho odvodíme z nalezených vlastností), je nutné ho dosadit do zadání a zkouškou ověřit, že je skutečně řešením. Osvětlíme si to na úloze (3):

Úloha. Najděte všechny funkce definované na celé reálné ose splňující funkcionální rovnici

$$f(x+y)+2f(x-y)-4f(x)+xf(y)=3y^2-x^2-2xy+xy^2.$$

Řešení. Předpokládejme, že nějaká $f(x)$ je řešením a označme $f(0)=c$. Funkcionální rovnice je splněna pro všechny dvojice čísel x, y, je tedy splněna i pro dvojici čísel[13] $x=x$, $y=0$, dosazením za tuto dvojici dostaneme:

$$-f(x)+cx=-x^2$$

neboli

$$f(x)=x^2+cx.$$

Dosadíme-li v získaném vztahu $x=0$, dostaneme navíc $f(0)=0$, tedy $c=0$ a jediným tvarem, jaký může mít naše funkce $f(x)$, zůstal $f(x)=x^2$. Z předpokladu,

[13] dosazujeme speciální hodnoty za proměnné, abychom dostali nějakou vlastnost funkce, nebo konkrétní tvar

že funkce $f(x)$ řeší naši rovnici jsme odvodili, že nutně musí platit vztah $f(x) = x^2$. Teď už stačí jen získaný vztah dosadit do zadané rovnice a ověřit, že funkce $f(x) = x^2$ je řešením naší rovnice.

Vztah, který by určoval, jak musí nutně vypadat funkce splňující zadanou rovnici, nemusí jít z funkcionální rovnice přímo získat. Proto je tu *Cauchyova* metoda.

Cauchyho metoda

Cauchyho metoda se zakládá na postupném odvození chování funkce pro přirozená čísla, poté pro celá, posléze pro racionální a s trochou štěstí (pokud to zadání požaduje) nakonec pro všechna reálná čísla.

Cauchyho metodu ozřejmíme na úloze (2).

Úloha. Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující rovnici

$$f(x + y) = f(x) + f(y);\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Předpokládejme, že máme jedno takové řešení[14] $f(x)$. Dosazením $x = 0$ a $y = 0$ zjistíme, že nutně[15] platí $f(0) = 0$. Dosazením[16] $y = -x$ dostáváme $f(-x) = -f(x)$. Matematickou indukcí snadno[17] dokážeme vztah $f(x_1+x_2+\cdots+x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$, speciálně pak pro $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ vztah $f(nx) = nf(x)$ pro každé reálné číslo x a přirozené(!) číslo n. Označme si $f(1) = c$. Pak $f(n) = nf(1) = cn$ pro každé přirozené číslo n. Volbou $x = m/n$ ve vztahu $nf(x) = f(nx)$ dostáváme $nf(m/n) = f(n \cdot m/n) = f(m) = cm$, neboli $f(m/n) = c \cdot m/n$. Vztah $f(x) = cx$ tedy platí pro každé kladné(!) racionální číslo x. Díky vztahu $f(0) = 0$ a $f(-x) = -f(x)$ máme platnost vztahu $f(x) = cx$ pro každé(!) racionální číslo x. Protože je množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ *hustá*[18] v $\mathbb{R}$ a protože je funkce $f(x)$ spojitá, musí $f(x)$ splňovat vzorec $f(x) = cx$ na všech reálných číslech.

Zkouškou[19] provedenou dosazením do rovnice v zadání úlohy snadno ověříme, že funkce $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$, je opravdu řešením.

Ne vždy je ale řešení takto přímočaré a v jistém smyslu jednoduché. Mnohdy je potřeba postupně, navzájem na sebe navazujícími kroky, odvodit celou řadu skutečností (vlastností), z nichž konečně poskládáme, jak může funkce vypadat.

---

[14] Vůbec nemusíme vědět jaké řešení. Důležité je si říci: „Kdybychom řešení měli, tak by pro něj platily následující věci …“

[15] funkcionální rovnice má být pro funkci $f(x)$ splněna pro všechny dvojice $x, y \in \mathbb{R}$, proto musí být splněna i pro konkrétní dvojici hodnot $x = 0, y = 0$.

[16] rovnice je splněna pro všechny dvojice x, y, takže musí platit i pro speciální volbu $y = -x$

[17] na začátku dáváme $f((x_1 + x_2) + x_3) = f(x_1 + x_2) + f(x_3) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$, atd.

[18] že $\mathbb{Q}$ je *hustá* v $\mathbb{R}$ znamená, že libovolně blízko kteréhokoli reálného čísla najdeme nějaké racionální číslo

[19] Aspoň se zmínit o zkoušce je velice potřebné, protože jsme zjistili, co by musela funkce splňovat, kdyby existovala, ale nevíme ještě, jestli když funkce splňuje $f(x) = cx$, tak vyhovuje. Může se stát, že bude vyhovovat jen pro určitá c nebo pro žádné.

Základní vlastnosti funkcí

Funkce mohou mít tyto vlastnosti důvěrně známé ze střední školy:

(a) *sudá, resp. lichá*: platí $f(x) = f(-x)$, resp. $f(x) = -f(-x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$

(b) *rostoucí, resp. klesající*: pro libovolná $x < y$ je $f(x) < f(y)$, resp. $f(x) > f(y)$

(c) *nezáporná* (nebo *kladná*): $f(x) \geq 0$ (nebo $f(x) > 0$)

(d) *prostá*: funkce nenabývá žádné hodnoty víc než jednou ($x \neq y \Rightarrow f(x) \neq \neq f(y)$)

(e) *na*: funkce nabývá všech hodnot aspoň jednou

(f) *bijekce*: funkce nabývá všech hodnot právě jednou (každému x z definičního oboru náleží právě jedno $f(x)$ z oboru hodnot)

(g) *spojitá*: zjednodušeně řečeno ji jde nakreslit jedním tahem

Tyto vlastnosti ve složitějších úlohách velmi pomáhají, nebo jsou dokonce nutným krokem k řešení. Rozeberme postupně jejich užitečnost.

ad (a). Sudost nebo lichost ulehčuje práci na polovinu, pokud je potřeba řešit rovnici zvlášť pro kladná a záporná čísla. Pomáhá též, pokud nám různým dosazováním vyjde soustava rovnic – je další pomocnou rovnicí.

ad (b). Je velice důležitá, protože může v úlohách řešených pomocí *Cauchyovy* metody nahradit *spojitost*. Také z ní plyne, že je funkce *prostá*. Významná je i její slabší varianta $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, resp. $f(x) \geq f(y)$, která taktéž může nahrazovat *spojitost*, ale už neříká, že je funkce *prostá*.

ad (c). Tato vlastnost se zkrátka může hodit :)

ad (d). Velice důležitá vlastnost, která dává $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, přičemž a a b můžou být i výrazy. Pokud je funkce zároveň *na*[20], dostáváme, že je *bijekcí*.

ad (e). V naprosté většině případů zajišťuje, že pro každé x existuje y takové, že $f(y) = x$. Pokud je funkce zároveň *prostá*, je to *bijekce*.

ad (f). Shrnuje v sobě vlastnosti funkce *prosté* a *na* a zároveň dodává silnou implikaci jestliže $f(x) = y$, tak $f(y) = x$.

ad (g). Jak bylo vidět v příkladu (2), řešeném pomocí *Cauchyovy* metody, hodí se spojitost při rozšíření z nějaké *husté* číselné množiny na $\mathbb{R}$. Touto hustou číselnou množinou mohou být všechna racionální čísla, všechna iracionální čísla, zlomky ve tvaru $a/2^b$, kde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, atd.

[20] *na* obor hodnot

Cvičení na vlastnosti funkcí

Nyní následuje několik cvičení na předchozí užitečné vlastnosti.

Cvičení. Ukažte, že

(i) z $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ vyplývá, že je $f(x)$ lichá.

(ii) z $(f(x) + f(y))(f(u) + f(v)) = f(xu - yv) + f(xv + yu)$ pro $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, plyne, že $f(x)$ je sudá. Nápověda k (ii): $x = 0, u = 1, v = 1$

Cvičení. Ukažte, že z každého z následujících bodů plyne, že je funkce $f(x)$ rostoucí, a tedy prostá (u (iii) jen neklesající):

(i) $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : f(xf(y)) = f(xy) + x$.

(ii) $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+ : f(x + f(x)y) = f(x)f(y)$ a $f(x) > 1$

(iii) $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : f(x^2 + y^2) = f(x^2) + f^2(y)$

Cvičení. Ukažte, že z každého z následujících bodů plyne, že je funkce $f(x)$ prostá, u (ii) a (iii) že je bijekcí:

(i) $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : f(x^2 + y^2) = f(x^2) + f^2(y)$

(ii) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$

(iii) $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+ : f(xf(y)) = f(x)/y$

Cvičení. Vyřešte na $\mathbb{R}$ funkcionální rovnici $f(x+y) = f(x) + f(y)$, když víte, že:

(i) $f(x)$ je neklesající

(ii) $f(x)$ je omezená na nějakém intervalu (a, b)

Cvičení. Vyřešte na $\mathbb{R}$ funkcionální rovnici $f(x+y) = f(x)f(y)$, když víte, že:

(i) $f(x)$ je neklesající

(ii) $f(x)$ je spojitá na nějakém intervalu (a, b)

Další tipy a triky

Tip č.1: Nenechte se vázat tím, že jsou x a y reálné proměnné. Například $f(x)$ je hodnota funkce v čísle x, takže je to také číslo, a můžete ho bez problému za x nebo y dosadit.
Tip č.2: Pokuste se na některé straně vhodným dosazením dostat symetrický výraz[21]. Symetrický výraz Vám pomůže následovně: v příkladu s funkcí$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ a rovnicí $f(xf(y)) = f(xy) + x$ vezměme $x = f(t)$ a dostaneme

$$f(f(t)f(y)) = f(f(t)y) + f(t) = f(ty) + y + f(t); \;\; t, y \in \mathbb{R}.$$

[21]symetrický je takový výraz, že v něm můžeme prohodit názvy proměnných, aniž by se výraz změnil. Příkladem jsou $f(x) + f(y)$ nebo $f(f(x)f(y))$.

Výraz na levé straně je symetrický, proto lze proměnné prohodit i na pravé straně:

$$f(ty) + y + f(t) = f(yt) + t + f(y).$$

Odtud už snadno dostaneme $f(t) - t = f(y) - y$, výraz $f(t) - t$ nezávisí na t a proto musí platit $f(t) = t + const$.

Těžké příklady

V následujících příkladech hledejte všechna řešení funkcionálních rovnic na zadaných oborech. Rovnice jsou splněny pro všechny hodnoty z oboru, není-li řečeno jinak.

Příklad. $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x^2(f(x) + f(y) = (x + y)f(f(x)y))$. (Celostátní kolo MO 2004)

Příklad. $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : f(xf(y)) = f(xy) + x$. (Celostátní kolo MO 2002)

Příklad. $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+ : f(xf(y)) = f(x)/y$. (IMO 1990)

Příklad. $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+ : f(x + f(x)y) = f(x)f(y)$ (Golab-Schinzelova rovnice)

Příklad. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$. (IMO 1992)

Příklad. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : (f(x) + f(y))(f(u) + f(v)) = f(xu - yv) + f(xv + yu)$. (IMO 2002)

Příklad. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : (f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$. (IMO 1999)

Literatura

K příspěvku byly použity znalosti z textu *Pavla Podbrdského*, který najdete na `http://mks.mff.cuni.cz/library/funkcionalni_rovnice2/funkcionalni_rovnice2.ps`

Dále jsem použil informace ze stránek *Johna Scholese*, kde najdete nespočetné množství olympijských příkladů všech typů. (Je jich tam kolem 4000, z nich asi polovina s řešením) Nachází se na adrese `http://www.kalva.demon.co.uk/`

Posledním zdrojem byla knížečka Školy Mladých Matematiků *Funkcionální rovnice*.