Funkcionální rovnice na celých číslech

Vít „Vejtek“ Musil

Funkcionální rovnice na celých číslech (či na podmnožinách) lze řešit standardními metodami funkcionálních rovnic, jako je substituce, úvahy o vlastnostech funkcí (prostota, nabývání hodnot, monotonie), symetrické výrazy, soustavy rovnic atd. Většina úloh však těží z konkrétních vlastností celých či přirozených čísel. Jmenujme některé: obě tyto množiny jsou diskrétní a spočetné, jsou oaritmetizované, lze hovořit o dělitelnosti. Množina přirozených čísel je navíc dobře uspořádaná (každá podmnožina má nejmenší prvek) a platí pro ni princip matematické indukce. Odtud se odvíjejí i metody řešení. Jmenujme opět některé z nich.

- *Konstruktivní přístup.* Některé rovnice vybízejí k postupnému konstruování funkce, často za pomoci indukce. K tomu většinou stačí dát do souvislosti hodnotu $f(n)$ s hodnotou $f(n+1)$ a znát chování na začátku (nebo si jej zvolit). Konstruují se i nejrůznější bijekce, například pro rovnice typu $f\big(f(n)\big) = g(n)$.
- *Indukce.* Rovnice Cauchyova typu a stanovené hypotézy dokazujeme indukcí. Na celých číslech musíme provádět indukci dvakrát, tj. na obě strany.
- *Extremální princip.* Využíváme dobrého uspořádání přirozených čísel, kdy z množiny čísel majících jistou vlastnost zvolíme nejmenší. Toho se často využívá v důkazech sporem, někdy se tento princip zove nekonečný sestup.
- *Báze dvojková i jiné.* Náš desítkový pohled na věc umí značně zkreslovat.
- *Kouknu a vidím.* Některé rovnice nám mohou připomenout známý algoritmus, řešení je pak nasnadě.
- *Pevné body.* Vyplatí se je hledat.
- *Nerovnosti.* Speciálně se hodí vědět, kdy nastává rovnost.
- *Nezapomenout na zkoušku!*

Domluvíme se, že symbol $\mathbb{N}$ označuje množinu všech kladných celých čísel, $\mathbb{N}_0$ je značkou pro nezáporná celá čísla.

Příklad 1. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující pro každá $m, n \in \mathbb{N}$

$$f\big(m + f(n)\big) = n + f(m).$$

Příklad 2. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující pro každá $m, n \in \mathbb{N}$

$$f\big(f(m) + f(n)\big) = n + m.$$

Příklad 3. Buď k sudé přirozené číslo. Najděte počet všech funkcí $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ splňujících pro každé $n \in \mathbb{N}_0$

$$f\big(f(n)\big) = n + k.$$

(variace na IMO 1987)

Příklad 4. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ splňující pro každá $m, n \in \mathbb{N}_0$

$$f\big(m + f(n)\big) = f\big(f(m)\big) + f(n).$$

(IMO 1996)

Příklad 5. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$f\Big(f\big(f(n)\big)\Big) + f\big(f(n)\big) + f(n) = 3n.$$

Příklad 6. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, pro které platí $f(0) = 0$ a

$$f(2n + 1) = f(2n) + 1 = f(n) + 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Příklad 7. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující pro každá $m, n \in \mathbb{Z}$

$$f(m + n) + f(mn - 1) = f(m)f(n) + 2.$$

Příklad 8. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $f(1) = 1$, $f(2n) < 6f(n)$ a

$$3f(n)f(2n + 1) = f(2n)\big(3f(n) + 1\big)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 9. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující pro každá $m, n \in \mathbb{N}$

(i) $f(n, n) = n$,
(ii) $f(m, n) = f(n, m)$,
(iii) $\frac{f(m,m+n)}{f(m,n)} = \frac{m+n}{n}$.

Příklad 10. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pro které platí $f(1) \neq 0$ a

$$f^2(1) + f^2(2) + \cdots + f^2(n) = f(n)f(n + 1)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 11. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ splňující pro každé $n \in \mathbb{Z}$

$$6f(n+3) - 3f(n+2) - 2f(n+1) - f(n) = 0.$$

Příklad 12. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$2n + 2001 \leq f\big(f(n)\big) + f(n) \leq 2n + 2002.$$

(BMO 2002)

Příklad 13. Buď $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkce splňující $f(n+1) > f\big(f(n)\big)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že f je identita na $\mathbb{N}$. (IMO 1977)

Literatura

[1] T. Andreescu, I. Boreico, *Functional Equations*, electronic edition, 2007.