# Funkce na přirozených a celých číslech

*Honzík Vaňhara*

Abstrakt. V přednášce se naučíte základy funkcionálních rovnic a nerovnic na přirozených číslech, což Vám může pomoci k lepšímu pochopení funkcionálních rovnic jako celku. A později přejdeme i na více než základy.

Ačkoliv se toto může zdát jako úzké téma, v podstatě pokrývá ty nejlepší finty jak z vlastností přirozených čísel, tak z funkcionálních rovnic a kupodivu může zasáhnout i do kombinatoriky, protože funkce je vlastně taková krabička, která nějakou věc „sešrotuje" a místo ní „vyplivne" nějakou jinou, která náleží do jejího oboru. A pokud je to funkce na přirozených číslech, tak nic nebrání, aby se v některých případech chovala jako permutace. Jenže stále je to funkce, a tak u ní můžeme hledat vlastnosti, jako je prostota, nebo zkoušet dosazovat. Nakonec díky tomu, že pracujeme v celých nebo přirozených číslech, můžeme používat matematickou indukci nebo (v případě přirozených čísel) i nekonečný sestup. Metod se nabízí opravdu hodně.

### Finty funkcionální

První fintou je důkaz prostoty a její využití. Nejlepší bude, když si toto ukážeme na jednoduchém příkladě:

**Příklad 1.** Dokažte, že každá funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taková, že pro každé $m \in \mathbb{Z}$ platí

$$f(f(m)) = -m,$$

je lichá a bijekce.

Idea je jednoduchá. Kdyby existovaly dvě hodnoty $x$ a $y$, pro která platí $x \neq y$ a zároveň $f(x) = f(y)$, pak by platilo

$$-x = f(f(x)) = f(f(y)) = -y.$$

A nyní vidíme, že pokud je $f(x) = f(y)$, potom $x = y$, tedy funkce je prostá. Využití je ještě trošku sofistikovanější, a to že pokud máme rovnost dvou funkčních hodnot, potom se nám rovnají i argumenty oněch funkcí. Tedy pokud je $f$ prostá funkce, $A$ nějaký výraz a $B$ nějaký jiný výraz, potom $f(A) = f(B)$ implikuje $A = B$.

Druhou fintou je využití symetrie, což je klasický postup u funkcionálních rovnic. Využíváme například rovností typu $f(xy) = f(yx)$, $f(x+y) = f(y+x)$ apod. A tohoto dosáhneme pouhým dosazením $x$ za $y$ a naopak.

Klíčová slova. funkce, funkcionální rovnice a nerovnice, přirozená čísla, celá čísla

**Příklad 2.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro každou dvojici $m, n$ celých čísel platí

$$f(f(m) + f(n)) = f(m) - n.$$

**Příklad 3.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro každou dvojici $m, n$ celých čísel platí

$$f(n + m) - f(n) + f(m) = 2f(mn) - mn.$$

Třetí fintou zastupující permutace je transpoziční prohození. Ač se to může zdát zvláštní názvem, jde v podstatě o zcela jednoduchou věc. Pokud platí $f(f(a)) = a$, potom funkce na daném oboru funguje právě jako transpozice. Tedy vezmeme-li si $a$ takové, že $f(a) = c$, tak potom z dané podmínky vyplývá přímo, že $f(c) = a$. Když si to člověk představí na ose čísel, tak krásně vidí, jak se některá čísla mohou prohazovat anebo samozřejmě některá budou ukazovat zpátky na sebe.

**Příklad 4.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro každé $n$ celé platí

$$\begin{aligned} f(f(n)) &= n, \\ f(f(n+2) + 2) &= n. \end{aligned}$$

## Využití vlastností přirozených čísel

První fintou je klasická matematická indukce. Je to vlastně úplně jednoduchý princip. Jenže je i stejně silný, jak je jednoduchý. Jen si to zkuste:

**Příklad 5.** Rozhodněte, jestli existuje funkce $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$h(h(n)) + h(n + 1) = n + 2.$$

**Příklad 6.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$\begin{aligned} f(2) &= 2, \\ f(n + 1) &> f(n), \\ f(mn) &= f(m)f(n). \end{aligned}$$

Druhou fintou je nekonečný sestup. Jak na něj? Jsou dva způsoby. Jeden, užívaný hlavně v teorii čísel, vypadá tak, že ke každému řešení naleznete i řešení menší. Jenže na přirozených číslech nemůžeme jít dolů do nekonečna, a tedy se někdy zastavíme, což je většinou spor. Druhý způsob nekonečného sestupu – obecněji používaný – využívá extremálního principu. Vezmeme-li si, že existuje nejmenší prvek splňující rovnici, a najdeme i menší prvek, který též vyhovuje zadání, máme spor. Zkuste si to sami.

**Příklad 7.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(f(n)) < f(n+1).$$

(IMO 1977)

Třetí fintou je postupný vzestup. Je to v podstatě prostý postup. Najdete, jak se chová nejmenší člen, a potom najdete, jak se chová další člen. A další. A další. Až tímto postupem vystavíte všechna přirozená čísla.

**Příklad 8.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$\begin{aligned} f(1) &= 2, \\ f(f(n)) &= f(n) + n. \end{aligned}$$

### A nyní pár příkladů na procvičení

Protože hezkých příkladů není nikdy dost a nejvíc se člověk naučí, když to zkusí na vlastní kůži, tak tady jich pár je.

**Příklad 9.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

**Příklad 10.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, jejichž oborem hodnot je množina $\mathbb{N}_0$, splňující

$$f(n) \geq n + (-1)^n.$$

**Příklad 11.** Existuje nějaká funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f\left(f(n)\right) + f(n+1) = 2n?$$

**Příklad 12.** Existuje nějaká funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f\left(f(n)\right) + f(n+1) = 3n?$$

**Příklad 13.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n.$$

**Příklad 14.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(m + f(n)) = f(m) + n.$$

**Příklad 15.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(f(m) + f(n)) = m + n.$$

**Příklad 16.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + n.$$

**Příklad 17.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(mf(n)) = n^2 f(mn).$$

**Příklad 18.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(f(n)) = 3n.$$

**Příklad 19.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(f(m)) = m + 1.$$

**Příklad 20.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující

$$f(m + f(n)) = f(m) - n.$$

**Příklad 21.** Najděte nejmenší možnou hodnotu $f(2007)$ pro $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f(xf(y)) = yf(x).$$

(Celostátní kolo MO 2007)

**Příklad 22.** Najděte $f(2002)$ a $f(2011)$ pro $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která pro všechna prvočísla $p, q$ a všechny dvojice přirozených čísel $a, b$ splňuje

$$\begin{aligned} f(a) \cdot f(b) &= f(ab), \\ f(p + q) &= f(p) + f(q). \end{aligned}$$

**Příklad 23.** Určete všechny takové funkce $f$ z množiny kladných celých čísel do množiny kladných celých čísel, že pro všechna kladná celá čísla $a, b$ existuje nedegenerovaný trojúhelník, jehož strany mají délky

$$a, f(b), f(b + f(a) - 1).$$

(Trojúhelník je nedegenerovaný, neleží-li všechny jeho vrcholy na téže přímce.)

(IMO 2009)