Funkce divoké, a ještě divočejší

Martin Tancer

Úvod

Pojem *funkce* všichni určitě velmi dobře znáte. Ve škole jste měli určitě velké množství příkladů na to, co je to funkce (konstantní funkce, lineární funkce, lineární lomené funkce, kvadratické funkce, polynomy, goniometrické funkce, exponencielu, logaritmus, atd.). Cílem mé přednášky je ukázat, že zajímavých příkladů na funkce je ještě mnohem více. Často budou vybočovat z představ, které se na střední škole jeví jako samozřejmé.

Přednášku chci pojmout úmyslně trochu nepřesně. Některé příklady zajímavých funkcí by totiž vyžadovaly vysokoškolské znalosti, pokud by se měly říci přesně. Tudíž se na přednášce budeme spíš držet toho, že si nakreslíme obrázek a z obrázku zajímavé vlastnosti vykoukáme. Nebudeme v podstatě nic dokazovat, spíš si s těmi funkcemi budeme hrát.

Ve sborníčku, pro zvědavce, některé pojmy budou přesné (některé ne). Pokud Ti ze sborníčku nebudou jasné, nelekej se, nejsou vůbec důležité pro přednášku.

Funkce

Nyní si přesně zadefinujeme, co to je funkce. Až definice skončí, řekneme to trochu „lidsky“.

Definice. *Nechť A, B jsou dvě množiny. Funkcí $f : A \to B$ nazveme nějakou množinu uspořádaných dvojic $[a, f(a)]$, kde $a \in A$, $f(a) \in B$. Navíc platí, že pro každé $a \in A$ existuje právě jedno $f(a) \in B$, že $[a, f(a)]$ náleží dané množině.*

Lidská definice je, že každému bodu a z množiny A přiřadíme právě jedno $f(a)$ z množiny B. Toto přiřazení budeme nazývat funkcí f.

Rychle rostoucí funkce (nebo spíš posloupnosti)

V této části se budeme zabývat rychle rostoucími funkcemi $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Konkrétně, vytvoříme funkci, která roste opravdu hodně rychle.

Problém. Jak zjistit, že funkce f roste rychleji než funkce g?

Nebudeme zde psát žádný obecný návod, jak řešit předchozí problém. Rychlost růste funkcí spíše necháme na intuici založené na několika následujících příkladech.

Příklad. Nechť $f(n) = 2n$, $g(n) = 4n$ a $h(n) = n^2$. Platí, že $g(n) > f(n)$, pro každé přirozené n. Tudíž je rozumné tvrdit, že g roste rychleji než f. Situace s funkcí h už není tak jednoduchá. Například $h(1) < g(1)$. Na druhou stranu, pro všechna $n > 4$ je $h(n) > g(n)$, tudíž je rozumné tvrdit, že h roste rychleji než g. Intuice nám navíc říká, že funkce f a g rostou podobně rychle, zatímco funkce h roste „o kus“ rychleji než obě f a g.

Příklad. Nechť $f(n) = 2n$ a $g(n) = 2n + (-1)^n$. Potom se funkce f a g „střídají“ v tom, která z nich je větší, a nemá smysl tvrdit, že by jedna rostla rychleji než druhá.

Příklad. Nechť $f(n) = 2n$, $g(n) = 2^n$. Z intuice je vidět, že g roste výrazně rychleji než f. Pro přirozená a a n si zavedeme $a \uparrow n$ jako $\left.a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right\}n$. Označme $h(n) = 2 \uparrow n$. Potom funkce h roste výrazně rychleji než funkce g.

Nyní postup z předchozího příkladu trochu zobecníme, později tak dostaneme požadovanou rychle rostoucí funkci.

Definice. (Dvojrozměrná Ackermanova funkce) *Nejprve si definujme funkci $A_1(n) = 2n$. Dále chtějme, aby pro i přirozené platilo $A_i(1) = 2$. Předpokládejme, že už máme zadefinované funkce $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$ a z funkce A_i víme hodnoty $A_i(1), A_i(2), \dots, A_i(n-1)$. Definujme $A_i(n) = A_{i-1}(A_i(n-1))$.*

Všimni si, že $A_1(n) = 2n$, $A_2(n) = 2^n$, $A_3(n) = 2 \uparrow n$. Pro dostatečně veliké i pak už funkce $A_i(n)$ roste hodně rychle. Pro lepší náhled si vytvořme tabulku několika prvních členů.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$A_1(n)$	2	4	6	8	10
$A_2(n)$	2	4	8	16	32
$A_3(n)$	2	4	16	65536	2^{65536}
$A_4(n)$	2	4	$2 \uparrow 65536$	hodně	hodně

Nyní si konečně zadefinujeme funkci, kterou jsme slíbili na začátku povídání.

Definice. (Jednorozměrná Ackermanova funkce) *Ackermanovu funkci A definujeme předpisem $A(n) = A_n(n)$.*

Funkce A časem přeroste jakoukoliv funkci A_i, roste tedy výrazně rychleji než kterákoliv z funkcí A_i.

Když už máme rychle rostoucí funkci, mohli bychom sestrojit i funkci pomalu rostoucí.

Definice. (Inverzní Ackermanova funkce) *Definujme* $\alpha(n) = \max\{k | A(k) \leq n\}$.

Funkce α je něco jako funkce inverzní k Ackermanově funkci a roste velmi pomalu. Přesto roste do nekonečna.

Zajímavé reálné funkce

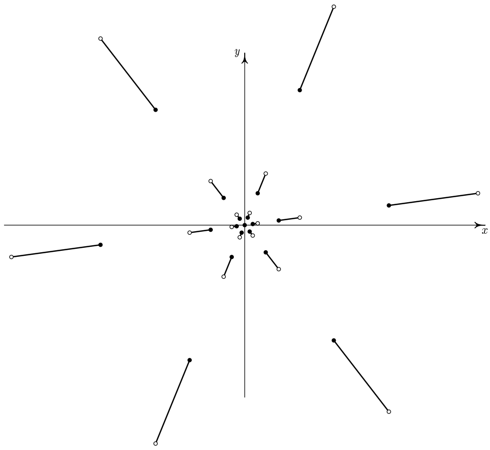
Nyní si uvedeme několik příkladů zajímavých reálných funkcí.

Definice. *Funkci* $R(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definujme jako:* $R(x) = 0$ *pro* x *iracionální.* $R(x) = q$, *kde* $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ *a zlomek* $\frac{p}{q}$ *je v základním tvaru.*

Funkce R nabývá na každém intervalu I libovolně vysokých hodnot.

Poznámka. Existuje dokonce funkce, která na každém intervalu nabývá všech reálných hodnot. Popis takové funkce by však sahal hluboce za rámec středoškolských znalostí.

Nyní se zaměříme na trochu jinou funkci. Nakresli si nějakou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Otoč její graf podle počátku o úhel 60 stupňů. Co vyjde? Nejspíš to nebude ani graf funkce. Pokud vyjde graf funkce, bude se výrazně lišit od grafu před otočením. Přesto si však ukážeme, že existuje funkce $f_{60} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jejíž graf se otočením o 60 stupňů podle počátku nezmění. Do sborníčku nakreslíme pouze její obrázek:



V tuto chvíli si řekneme pár slov o spojitosti. V žádném případě nebudeme spojitost funkce definovat pořádně (definice je odstrašující). Spíš si řekneme, co zhruba spojitost je. Funkce konstantní, lineární, polynomiální, exponenciela mají následující společnou vlastnost: jejich graf je možné nakreslit „jedním tahem“. Spojitost je pojem, který se v podstatě schovává za kreslení jedním tahem (pokud lze funkci nakreslit jedním tahem, potom je spojitá). Jiná (opět trochu nepřesná) představa je, že funkce je spojitá, pokud neobsahuje žádný „skok“ (přečti si následující příklad).

Příklad. Funkce sgn je definovaná jako $\mathrm{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$ a $\mathrm{sgn}(x) = -1$ pro $x < 0$. Funkce sgn je spojitá na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Není však spojitá na celém $\mathbb{R}$, jelikož má v nule „skok“.

Věta. (z matematické analýzy) *Skoro žádnou spojitou funkci $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nelze nakreslit jedním tahem.*

Nebudeme říkat, co přesně předchozí věta říká. Má sloužit pouze k tomu, aby ukázala, jak se někdy nějaký matematický pojem liší od představy, kterou o něm člověk má. Tvrzení předchozí věty tkví přibližně v tom, že typická spojitá funkce hodně kmitá, a tudíž se nedá nakreslit. V období, kdy se budovaly spojité funkce, mnoha matematikům dělala předchozí věta (když se v nějaké formě dokázala) velké problémy, právě proto, že se její závěr velmi lišil od představy, kterou měli o spojitých funkcích.

Nakonec se zaměřme na zajímavé monotónní funkce.

Problém. Jak vypadá rostoucí (neklesající) funkce?

Intuitivní představa říká, že taková funkce chvíli spojitě roste, potom o kousek skočí, potom zase spojitě roste, zase skočí, atd.

My si najdeme funkci skoků s (zbyde-li čas), která se této představě vymyká. Nejprve si seřadíme všechna racionální čísla do posloupnosti $(q_1, q_2, \dots)$, na přednášce bude naznačeno jak se to dá udělat. Myšlenka bude taková, že funkce s v racionálním čísle q_i poskočí o 2^{-i} nahoru. Taková funkce bude pouze skákat a na žádném intervalu nebude „spojitě růst“. V následující definici si funkci s popíšeme přesně. Definice, je ale dost odstrašující, tudíž se jí příliš nezabývej. Na přednášce se této definici rozhodně vyhneme.

Definice. (Funkce skoků) *Definujme funkci s předpisem*

$$s(x) = \sum_{q_i < x} \frac{1}{2^i}.$$