Fibonacciho čísla

Adéla Kostelecká

Abstrakt. Příspěvek shrnuje některé vlastnosti Fibonacciho čísel a obsahuje několik dokazovacích úloh. Většinu z nich lze interpretovat mnoha způsoby.

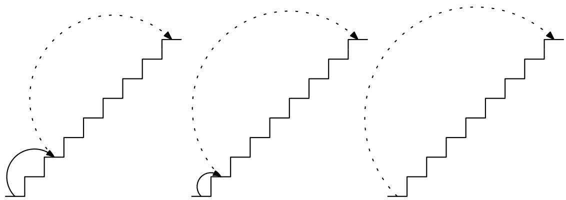
Fibonacciho čísla mají mnoho zajímavých vlastností. Na přednášce si ukážeme, jak některé pěkné identity dokazovat, a to nejen indukcí, ale i kombinatoricky. Některé příklady si znázorníme také geometricky.

Definice. *Fibonacciho posloupnost* je posloupnost F_n celých čísel splňující rekurenci $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ s počáteční podmínkou $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$.

Úloha. (Fibonacciho králíci) Leonardo chová králíky. Začíná s jedním párem. Každému páru trvá dva měsíce, než se jim narodí první mláďata. Potom každý měsíc zplodí právě jeden nový králičí pár, který opět dva měsíce čeká na svá první mláďata. Žádní králíci neumírají. Ukažte, že počet párů po n měsících je n-tý člen Fibonacciho posloupnosti.

Fibonacciho číslo si můžeme představit i jinak než na příkladu králíků.

Definice. (Schodiště) *Fibonacciho číslo* F_n je počet možností, jak vyjít schodiště o n schodech, vynecháváme-li nejvýše jeden schod.



$F_n \quad + \quad F_{n+1} \quad = \quad F_{n+2}$

Definice. (Dlaždičková) Počet možností, jak vyskládat tabulku $(n-1) \times 1$ kostičkami 1×1 a 2×1, nazveme n-tým *Fibonacciho číslem* a označíme ho F_n.

Úloha. Ukažte dle některé z definic, že součet druhých mocnin dvou po sobě jdoucích Fibonacciho čísel je opět Fibonacciho číslo.

Úloha. (Cassiniho identita) Ukažte kombinatoricky, že $F_{n-1} \cdot F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$.

Příklady

Příklad 1. Ukažte, že $F_{n+m} = F_n \cdot F_m + F_{n-1} \cdot F_{m-1}$.

Příklad 2. Ukažte, že platí $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + ... + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

Příklad 3. Uvědomte si, že počet možností, jak vyskládat tabulku $(n-1) \times 2$ dominovými kostkami, je F_n.

Příklad 4. Uvědomte si, že počet možností, jak vyskládat tabulku $(n+1) \times 1$ dílky většími než 1×1, je F_n.

Příklad 5. Uvědomte si, že počet možností, jak rozdělit tabulku $n \times 1$ kostičkami s lichými rozměry, je roven F_n.

Příklad 6. Uvědomte si, že počet posloupností nul a jedniček délky n, které neobsahují dvě nuly vedle sebe, je roven F_{n+2}

Příklad 7. Dokažte $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

Příklad 8. Ukažte $F_1 \cdot F_2 + F_2 \cdot F_3 + \cdots + F_{2n-1} \cdot F_{2n} = F_{2n}^2$.

Příklad 9. Ukažte, že platí $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$.

Příklad 10. Dokažte, že pro každé $n \geq 4$ platí $F_n^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2$.

Příklad 11. Dokažte, že pro $n \geq 1$ platí $F_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$.

Příklad 12. Dokažte, že pro $n \geq 1$ platí $F_{n+5} > 10F_n$.

Příklad 13. Určete hodnotu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1} \cdot F_{n+1}}$.

Příklad 14. Určete hodnotu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1} \cdot F_{n+1}}$.

Literatura a zdroje

[1] Calda Emil: *Sbírka řešených úloh*, Prometheus, 2006.
[2] Polster Burkard: *Q.E.D. Krása matematického důkazu*, Dokořán, 2014.
[3] Mirek Olšák: *Kombinatorické (Ne)počítání*, Hostětín, 2013.
[4] *Cut The Knot*, *http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/combinatorics/FibonacciTilings.shtml*
[5] *Wolfram Math World*, *http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html*