

Jak odhadnout nepředstavitelné – Fermiho problémy

JAN KADLEC

ABSTRAKT. Enrico Fermi byl jeden z nejvýznamnějších fyziků a matematiků minulého století. Mezi mnohým proslul též rychlým řešením problémů velmi náročných na představu, jako například jak velkou plochu bychom pokryli krabicemi od pizzy, kterou zkonzumují Američané za rok, jaká je hmotnost všech proteinů v buňce či kolik ladičů pián je v Chicagu. Podobné otázky jsou oblíbené v přijímacích testech společností jako Google. V přednášce si ukážeme, jak k těmto problémům přistupovat, jak odhadovat, a to nejen výsledek, ale i chybu.

Enrico Fermi mimo jiné pracoval na vývoji atomového reaktoru a atomové bomby za druhé světové války. Legenda praví, že z pouhého hození papírové kuličky na stůl byl schopen předpovědět sílu výbuchu atomové bomby. Jeho výsledek 10 kt TNT oproti skutečné síle 20 kt TNT je vskutku impozantní. Podobné odhady se dají využít všude, kam se jen podíváme, a mnohdy nám ušetří mnoho času s rozhodováním či například s výběrem vhodné metody pro provedení experimentu a měření (třeba na měření délky dálnice si nevezmeme milimetrové pravítko). Jak se dá k takovému odhadu dospět? Nejprve se podíváme na to, jak k takovým problémům přistoupit, a určíme první pomocné body.

- (1) **Napiš řešení** – tedy, zamysli se nad rozumně blízkým řešením. Stačí, když odhadneš řešení s chybou jednoho řádu. Uveďme si příklad.

Příklad. Jdeš nakupovat a máš stokorunu, kterou jsi ochoten utratit za dobrý oběd. Když uvidíš (dobrý) oběd za 50, okamžitě ho koupíš. Když za 500, určitě si ho nekoupíš. Pouze tehdy, když bude cena někde okolo té, kterou jsi ochoten zaplatit, budeš váhat. Obvykle nám tedy stačí odhadnout řešení řádově.

- (2) **Rozděl a panuj!** Úlohu si rozděl na více částí, každou odhadni zvlášť s chybou do jednoho řádu a poté jednotlivé části spoj.

Úloha. Kolik je v buňce proteinů? K této úloze se vrátíme později a právě na ní si budeme princip rozděl a panuj ukazovat (ale můžete se zamyslet už nyní :-)).

- (3) Urči **horní a dolní hranice**.

- (4) A následně je využij k dobrému odhadu pomocí **geometrického průměru**.
 - (5) **Porovnej svůj výsledek.** Často je možné najít nějakou podobnou úlohu, vždy se dá vrátit zpět a podívat se – je můj výsledek příliš malý? Příliš velký? Akorát?
 - (6) Nebo ho odhadni jinak. **Vždy je více cest.**
 - (7) **Odhadni chybu.** Vždy chceme vědět, jak moc se můžeme mýlit.
- Ale ještě předtím pár pomůcek, abychom se v tom dobře orientovali.

Zápis čísel pomocí mocnin

Budeme pracovat s velkými a velmi malými čísly, a proto je výhodné přepsat vše ve formě násobku čísla a mocniny 10. Při jejich násobení (dělení) pak jen sečteme (odečteme) mocniny desítky a vynásobíme (vydělíme) číslo (koeficient). Pár příkladů takto zapsaných čísel, jež se nám budou hodit:

- (1) Avogadrovo číslo (udává počet částic v jednom molu látky) – $N_A = 6 \cdot 10^{23}$
- (2) Počet obyvatel USA – $3 \cdot 10^8$
- (3) Počet obyvatel ČR – 10^7
- (4) Vzdálenost Země od Slunce v metrech – $1,5 \cdot 10^{11}$.

Počítání geometrického průměru

Definice. Geometrický průměr a dvou čísel b a c je definován jako: $a = \sqrt{b \cdot c}$.

Při odhadech budeme často používat geometrického průměru. Dá se ukázat, že tato metoda dává dobré výsledky, ale pro tuto přednášku je to příliš komplikované. Navíc s její pomocí je nám vyjádření chyby bližší – výsledek může být dvakrát menší/větší a ne o $\pm$ nějaké číslo. Další neméně důležitou věcí je, že mnoho závislostí v přírodě je logaritmických, dává log-normální rozdělení. A i s tím si geometrický průměr poradí. Důkazy opět dalece přesahují nejen rozsah, ale i účel naší přednášky.

Jeho počítání si rozdělíme na dva případy:

- (1) Po násobení je mocnina u desítky sudá. Pak jen zprůměrujeme pomocí aritmetického průměru koeficienty a mocniny.

Příklad. Geometrický průměr $2 \cdot 10^2$ a $3 \cdot 10^4$ je přibližně $\frac{2+3}{2} \cdot 10^{\frac{2+4}{2}} = 2,5 \cdot 10^3$. Přesná hodnota je 2449, tedy odhad je to velmi dobrý.

- (2) Po násobení je mocnina u desítky lichá. Od mocnin odečteme jedničku, koeficienty vynásobíme třemi a pak stejně jako u (1).

Příklad. Geometrický průměr $2 \cdot 10^3$ a $3 \cdot 10^4$ je přibližně $\frac{2+3}{2} \cdot 3 \cdot 10^{\frac{3+4-1}{2}} = 7,5 \cdot 10^3$. Přesná hodnota je 7746.

A hurá na problémy!

Úloha. (Rozehřívací.)

Šance, že vyhrajete loterii, je jednu ku sto milionům. Jak vysoký by byl štos, kdybyste losy pokrývající všechny možnosti poskládali na sebe?

Malá anketa na procvičení představivosti:

- (1) Jako Sněžka (1600 m).
- (2) Jako Mount Everest (10000 m).
- (3) Poloměr Země (10^7 m).
- (4) Vzdálenost na Měsíc (10^8 m).

Řešení. K vyřešení potřebujeme znát dvě informace – kolik je losů a jak je jeden los tlustý. Za předpokladu, že vyhrává jen jeden los, máme 10^8 možností, tedy losů.

Jak tlustý je jeden los? Pojďme to odhadnout. Balík papíru (500 ks) má asi 5 cm. Losy však bývají o něco tlustší. Zkusme karty. Balíček 32 karet má asi 1 cm. Tedy:

$$t = \frac{1 \text{ cm}}{32 \text{ losů}} = 0,03 \frac{\text{cm}}{\text{los}} = 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{los}}$$

$$\text{výška} = 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{los}} \cdot 10^8 \text{ losů}$$

$$\text{výška} = 3 \cdot 10^4 \text{ m}$$

To je asi 30 km. Třikrát výše, než normálně létají dopravní letadla!

Příklad 1. (Klasika.) Kolik ladičů pián je v Praze (nebo v Londýně nebo ve Tvém městě)?

Příklad 2. Kdyby se vyroloval veškerý toaletní papír použitý za rok v ČR, jak dlouhou lajnu by vytvořil?

Příklad 3. Kolik plechovek džusu potřebuješ vypít, abys dočerpал energii nutnou na výstup „průměrné hory“?

Příklad 4. Kolik váží trilion Kč? Vyjádři, když je to trilion v bankovkách, mincích, zlatě, hodinách otrocké práce ...

Na následující úloze si procvičíme, jak se dívat na problém z různých stran.

Úloha. Jakou plochu bychom pokryli se všemi krabicemi od pizz, které Američané sní za rok?

Rozděl a panuj (a odhadni chybu)

Vyřešme následující problém a pak se vraťme zpět a odhadněme chybu.

Úloha. Kolik proteinů je v bakteriální buňce (E. Coli)?

Řešení. Předtím, než začneme řešit, si pojďme opět tipnout. Tentokrát bez možností ;-).

Řešení si opět rozdělíme na menší kroky a u každého se pokusíme o odhad chyby. Rozdělení je následující:

- (1) Velikost buňky – jak velká je buňka?
- (2) Hmotnost buňky – jaká je hustota buňky (pozor na jednotky)? Přejdeme nyní na jiné, užitečnější jednotky, na Daltony (Da).

Definice. (*Dalton*) Jeden Dalton odpovídá hmotnosti vodíkového atomu. Dále platí, že 1 g je roven součinu Avogadrova čísla a hmotnosti 1 Da.

A udělejme první aproximaci, $N_A \doteq 10^{24}$.

- (3) Hmotnost proteinů – jakou chybu děláme? Jakou hmotnost zabírají proteiny? Co tvoří největší část, nejvíce hmotnosti?
- (4) Počet proteinů – kolik váží jeden protein? Je složen z aminokyselin (AK), kolik AK má asi jeden protein a kolik váží jedna AK? Stačí už nyní jen vydělit hmotnost všech proteinů hmotností jednoho.

Pojďme zpět a podívejme se na chyby. První je velikost, dále počet AK, zastoupení proteinů v sušině, ... Vezmeme to odzadu. Jak moc přispívají proteiny do hmotností? Zde jsou reálné hodnoty mezi 0,1 až 0,2. Počet AK je další velkou nepřesností, ale pohybujeme se v oblasti dvojnásobku, tedy reálně mezi 100 až 500, což je obojí docela malá chyba. Co objem? To může být problém, neboť se spoléháme na rozměr a objem roste s jeho třetí mocninou. Přesněji tedy můžeme rozdělit námi získanou informaci a vztáhnout ji pouze na objem jednoho mikrometru krychlového.

Příklad 5. (Rozšíření předchozí) Kolik molekul mRNA je v této buňce?

Příklady

Příklad 6. Kolik lidí právě teď telefonuje nebo píše zprávu na svém mobilu?

Příklad 7. Kolik je na Zemi stromů?

Příklad 8. Kolik buněk je v lidském těle? A co obecný organismus?

Příklad 9. Vraťme se na chvilku k předchozímu příkladu. Při odběru krve Ti řekli, že počet červených krvinek ve Tvém vzorku je 4–6 milionů na mikrolitr krve. Porovnej jen odhad červených krvinek s výsledkem předchozího příkladu. Kde je problém?

Příklad 10. Kolik židlí se za rok prodá v ČR?

Příklad 11. Jak dlouho stráví voda v atmosféře, než opět spadne na zem?

Trošku těžší

Příklad 12. Jaký je průměrný počet nohou zvířat? Za zvířata považuj obratlovce i bezobratlé.

Příklad 13. Jaká je orbitální rychlost Země kolem Slunce? A její kinetická energie?

Příklad 14. Jaký je objem všech na Zemi člověkem postavených struktur (budov, domů, aut, ...)?

Návody

1. Kolik je obyvatel ve městě? Kolik pián je na obyvatele? Kolikrát za rok je piáno laděno? Kolik času zabere naladění piána? Kolik hodin pracuje ladič za rok?

2. Kolik toaletního papíru denně/rolí za měsíc potřebuješ? Kolik žije lidí v ČR?

3. „Průměrná hora“ je vyšší než budova a nižší než Mt. Everest. Změna potenciální energie je dána vzorcem $E = mgh$, kde m je hmotnost tělesa, g gravitační zrychlení $\doteq 10 \text{ m/s}^2$ a h je výška/vzdálenost, o kterou se v potenciálním poli posouváme. Jakou energetickou hodnotu má taková 330 ml plechovka?

4. Kolik je to bankovek/mincí a kolik váží jedna? Jakou hodnotu má zlato? Hustota zlata je 20 t/m^3 .

5. Z počtu proteinů využij produkční rychlost proteinů (délka jednoho buněčného cyklu je v rozmezí 30 min a 1 h, použij 3000 s, a rychlost je počet za čas) a následně rychlost produkce protein/mRNA (rychlost je 0,1-1 prot/mRNA/s).

6. Kolik lidí je na světě? Kolik času/jakou frakci tráví lidé denně psaním či voláním?

7. Jak velkou plochu zabírá souš? Kolik je asi stromů na 1 km^2 ?

8. Jak velké je lidské tělo a jak velká je eukaryotická buňka?

9. V žilách nám obvykle koloje kolem 5 l krve.

10. Kolik židlí „vlastních“ – na kolika sedíš? Jak často svou židli/své židle měníš?

11. Jaký je odpar vody na Zemi za rok? Kolik vody je v atmosféře? Ustálený stav říká, že je stejný přísun vody do atmosféry jako z atmosféry. Jak často tedy prší?

12. Jaký je průměrný počet nohou obratlovců? A co bezobratlých?

Bezobratlí – hmyzu je opravdu hodně, asi 10^{18} , ovšem červíků je ještě více. Členovců kolem 10^{18} , planktonu 10^{19-20} , hlístů, háďátek a tak podobně asi 10^{20} .

13. Jaká je doba oběhu a jaká je délka?

Jaká je hmotnost Země? Poloměr je asi 6000 km, hustota je větší než vody (1000 kg/m^3) a menší než železa (8000 kg/m^3). Jeden rok má $\pi \cdot 10^7 \text{ s}$.

14. Budovy dominují. Jak velká jsou místa, kde lidé žijí, a jak velká ta, kde pracují?

Literatura a zdroje

- [1] Lawrence Weinstein, John A. Adam: *Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin*, Princeton University Press, 2009.
- [2] Lawrence Weinstein: *Guesstimation 2.0: Solving Today's Problems on the Back of a Napkin*, Princeton University Press, 2012.
- [3] John Harte: *Consider A Spherical Cow: A Course in Environmental Problem Solving*, University Science books, 1988.
- [4] Ron Milo, Rob Phillips: *Cell biology by the numbers*, Garland Science, 2015.
- [5] Yinon M. Bar-On, Rob Phillips, Ron Milo: *The Biomass Distribution on Earth*, ještě nepublikováno, článek + SI.
- [6] Ron Milo: *Course cell biology by the numbers*, Weizmann Institute, Israel, 2013.
- [7] Luis Villazon: *What is the average number of legs for an animal?*, <http://www.sciencefocus.com/qa/what-average-number-legs-animal>