Od základů k fatal nerovnostem

Franta Konopecký

Úvod

Přednáška bude rychlokurzem drsného použití AGéčka a jeho obdob, ukáže, jak ho vidět téměř všude. Několik příkladů bude též na konvexitu a Jensenovu nerovnost. Kdo u Franty ulpí – neprohloupí :).

Nerovnosti

Věta. (AG-nerovnost) *Pro libovolná* $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ *platí*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n}.$$

Rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Výraz na levé straně je aritmetický průměr, výraz na pravé geometrický průměr, proto AG-nerovnost.

Ukázka. AG-nerovnost pro dvě a tři kladná čísla:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}, \qquad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Věta. (vážená AG-nerovnost) *Nechť* $w_1, w_2, \ldots, w_n$ *jsou váhy, tedy platí pro ně* $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$, *a nechť* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *jsou kladná reálná čísla. Potom platí nerovnost*

$$w_1 a_1 + w_2 a_2 + \cdots + w_n a_n \geq a_1^{w_1} a_2^{w_2} \ldots a_n^{w_n}.$$

Rovnost nastává při rovnosti $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Ukázka. Použití váženého AG při důkazu $2a^3 + b^3 \geq 3a^2 b$:

$$\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}b^3 \geq \left(a^3\right)^{2/3} \left(b^3\right)^{1/3} = a^2 b.$$

Ukázka. Vážené AG na nerovnost $3a^6 + 2b^6 + c^6 \geq 6a^3 b^2 c$:

$$\frac{1}{2}a^6 + \frac{1}{3}b^6 + \frac{1}{6}c^6 \geq \left(a^6\right)^{1/2} \left(b^6\right)^{1/3} \left(c^6\right)^{1/6} = a^3 b^2 c.$$

Poznámka. Volbou $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = \frac{1}{n}$ obdržíme z váženého AG normální AG-nerovnost.

Definice. (symetričnost) *Výraz je* symetrický *v proměnných a, b, c, pokud se jejich libovolnou záměnou nezmění.*

Definice. (cykličnost) *Výraz je* cyklický *v proměnných a, b, c, pokud se jejich cyklickou záměnou nezmění.*

Ukázka. Symetrický (a tedy i cyklický) výraz je

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}.$$

Ukázka. Nesymetrický, ale cyklický výraz je

$$\frac{a+b}{a}+\frac{b+c}{b}+\frac{c+a}{c}.$$

Definice. (homogenita) *Výraz je* homogenní, *pokud mají jeho členy stejný stupeň.*

Poznámka. Tato definice homogenity je velmi zjednodušená, přesněji je výraz $f(a,b,c)$ homogenní, pokud pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí $f(ta,tb,tc) = t \cdot f(a,b,c)$.

Ukázka. Homogenní výrazy jsou

$$a^2+bc, \qquad \frac{ab}{c}+\frac{c^3}{ab}, \qquad \frac{1}{a^2+b^2}+\frac{c}{b^3}.$$

Ukázka. Nehomogenní výrazy jsou

$$a+b+c+1, \qquad \frac{a^2+b}{c}.$$

Věta. (Jensenova nerovnost) *Nechť f je konvexní funkce na intervalu I a nechť v_1, v_2, …, v_n jsou váhy. Potom pro libovolná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ platí*

$$f(v_1x_1+v_2x_2+\ldots+v_nx_n) \le v_1f(x_1)+v_2f(x_2)+\ldots+v_nf(x_n),$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Příklady

Ve všech příkladech jsou a, b, c kladná reálná čísla.

Lehké

Příklad 1. Dokažte

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Příklad 2. Dokažte, že jestliže $abc = 1$, pak

$$(ab + bc + ca)(a + b + c) \geq 1.$$

Příklad 3. Dokažte

$$x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0.$$

Příklad 4. Dokažte

$$x^4 - 4x + 3 \geq 0.$$

Příklad 5. Dokažte

$$a^3 + b^3 + c^3 + abc \geq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2.$$

Příklad 6. Dokažte

$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + ab^3}{2}.$$

Střední

Příklad 7. Dokažte

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

Příklad 8. Dokažte, že jestliže platí $abc = 1$, pak

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

Příklad 9. Dokažte, že jestliže $a + b + c = 1$, pak

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Příklad 10. Dokažte, že jestliže $abcd = 1$, pak

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

Příklad 11. Dokažte, že jestliže $abc = 1$, pak

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Fatal Brutal

Příklad 12. Dokažte

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}.$$

Příklad 13. Dokažte, že jestliže $abc = 1$, pak

$$\frac{ab}{a^5+ab+b^5} + \frac{bc}{b^5+bc+c^5} + \frac{ca}{c^5+ca+a^5} \leq 1.$$

Příklad 14. Dokažte

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

Příklad 15. Dokažte, že jestliže $a+b+c = 3$, pak

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2+b^2+c^2.$$

Příklad 16. Dokažte

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Příklad 17. Dokažte

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Příklad 18. Dokažte

$$\frac{1}{a\,(b+1)} + \frac{1}{b\,(c+1)} + \frac{1}{c\,(a+1)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Příklad 19. Dokažte, jestliže platí $a+b+c = 2$, pak

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \leq 3.$$

Příklad 20. Dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Příklad 21. Dokažte

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Unlimited Evil

Příklad 22. Nechť $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Dokažte

$$\sum_{i,j=1}^{n} min\{a_i a_j, b_i b_j\} \leq \sum_{i,j=1}^{n} min\{a_i b_j, a_j b_i\}.$$

Zdroje

Na většinu z nejtěžších uvedených nerovností se lze proklikat přes internetové fórum `Mathlinks` na adrese `http://www.mathlinks.ro/Forum/index.php?f=32`. Články si seřaďte podle navštívenosti.